

Sur les algèbres de bords des surfaces marquées à p -ponctions

par

Ndongo Diouf

Thèse présentée au Département de mathématiques
en vue de l'obtention du grade de docteur ès Sciences (Ph.D.)

FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, octobre 2018

Le 31 octobre 2018,
le jury a accepté la thèse de Monsieur Ndongo DIOUF
dans sa version finale.

Membres du jury

Professeur **Thomas Brüstle**
Directeur de recherche
Département de mathématiques

Professeur **Ibrahima Assem**
Président-rapporteur
Département de mathématiques

Professeur **Shiping Liu**
Membre interne
Département de mathématiques

Professeur **Ralf Schiffler**
Membre externe
Département de mathématiques
Université du Connecticut

SOMMAIRE

Cette thèse parle de catégorifications exactes des algèbres amassées de types \mathbb{A}_n et \mathbb{D}_n à l'aide de la théorie des factorisations de matrices combinée à celle des modules de Cohen-Macaulay [Yos90] sur une algèbre jacobienne [DWZ08] provenant d'une surface [FST08].

Étant donnée une triangulation étiquetée σ d'une surface à bords marqués avec ponctions (S, M) , nous définissons un carquois géométrique à potentiel gelé $(Q_\sigma, W_\sigma, \mathcal{F})$ et montrons que l'algèbre jacobienne à bords gelés associée, notée $\Lambda^p(\sigma) = e_{\mathcal{F}} I_\sigma^p e_{\mathcal{F}}$, est indépendante du choix de σ , autrement dit, dépend uniquement de la surface (S, M) , c'est-à-dire $\Lambda^p(\sigma) = \Lambda_{(S, M)}^p$. En particulier, nous déterminons une forme générale explicite de celle-ci pour les cas du polygone à p -ponctions $(P_{n+3, p})$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, sous forme d'algèbre de groupe gauche d'un groupe cyclique G_{n+3} d'ordre fini sur une singularité d'hypersurface R_p , noté $R_p * G_{n+3}$.

Ensuite, nous utilisons une caractérisation des CM-modules sur une algèbre 1-Gorenstein de dimension peut-être infinie, proposée au chapitre 2, pour montrer que la catégorie des $(R_p * G_{n+3})$ -modules de Cohen-Macaulay $\text{CM}(R_p * G_{n+3})$ est équivalente à la catégorie de groupe gauche $\text{CM}(R_p) * G_{n+3}$. Cette équivalence permet de transférer les propriétés de 2-Calabi-Yau et de Frobenius retrouvées dans $\text{CM}(R_p)$ dans la catégorie $\text{CM}(R_p * G_{n+3})$.

Puis, nous montrons l'existence d'un $\text{CM}(R_0 * G_{n+3})$ -module inclinant amassée et utilisons un résultat de Keller-Reiten [KR08, Théorème 2.1.] pour établir une équivalence triangulée entre la catégorie stable $\underline{\text{CM}}(R_0 * G_{n+3})$ et la catégorie amassée $\mathcal{C}(\mathbb{A}_n)$.

Enfin, nous utilisons la relation $z_i = 2x_i - \prod_{k=1}^{n+1+p} y_{i+k}$ pour transformation la singularité R_1 en une singularité de Klein R'_0 de type \mathbb{A}_{2n+3} et ainsi établir une équivalence triangulée entre la catégorie stable $\underline{\text{CM}}(R_1 * G_{n+3})$ et la catégorie amassée $\mathcal{C}(\mathbb{D}_{n+3})$. Ces résultats établissent, pour chaque $p \in \{0, 1\}$, une correspondance bijective entre isoclasses de $\underline{\text{CM}}(R_p * G_{n+3})$ -modules inclinants amassés et triangulations étiquetées de $(P_{n+3, p})$.

Mots-clefs : surface de Riemann, catégories amassées, modules de Cohen-Macaulay et factorisations de matrices, singularités et algèbre jacobienne.

REMERCIEMENTS

Je remercie Allah Le Tout Puissant, Lui qui m'a gratifié deux petits enfants durant ce projet de recherche. Je désire remercier mon encadreur Thomas Brustlé d'avoir accepté de diriger cette thèse. Il m'a soutenu financièrement, conseillé et encouragé tout au long de cette thèse et m'a accordé un congé parental pour s'occuper de ma famille, après la naissance de chacun de mes deux enfants. Sa culture mathématique et pédagogie m'ont permis d'aboutir à ce résultat. Je tiens à lui exprimé ma gratitude et ma reconnaissance.

Je désire également remercier tous les autres membres du jury de cette thèse : le Professeur Ibrahim Assem qui a accepté de lire et de rapporter cette thèse, le Professeur Ralf Schiffler (membre externe) pour ses commentaires constructives et d'avoir accepté de se déplacer pour faire partie de mon jury et le Professeur Shiping Liu pour sa lecture et ses remarques importantes.

Je remercie le département de mathématiques pour son financement et de m'avoir accordé la chance de pratiquer en partie le métier d'enseignant universitaire ainsi que tous les membres du groupe de recherche S.A.G (Structure Algébrique et Géométrie).

Je remercie tous mes collègues du département des discussions que j'ai pu avoir notamment avec : Hipolito, Hongwei, Souheila sans oublier mes amis Aziz et Mamadou Sène qui ont partagé avec moi tous les moments difficiles de cette thèse.

Je remercie l'Institut des Sciences Mathématiques du Québec (I.S.M), pour les bourses d'excellence et de thésards étoiles qu'il m'a octroyées et la Fondation Forces pour son soutien financier.

Je tiens particulièrement à remercier chaleureusement mon père, qu'Allah lui fasse miséricorde, de m'avoir permis d'aller à l'école et de me donner la chance de faire des études universitaires. Je remercie également ma mère Salimata Pouye qui m'a éduqué, soutenu et communiqué les bonnes valeurs de la vie et ma belle-mère Bineta Thiam d'avoir bien pris soin de moi sans oublier les autres membres de ma famille notamment Bosse et sa femme Safy et Ibrahima, qui s'est déplacé jusqu'à Sherbrooke pour venir assister à ma soutenance. Je remercie aussi Mamadou Ndiaye et Alpha Diallo.

Ensuite, je remercie tous mes anciens professeurs du département de mathématiques de l'université Cheikh Anta Diop de Dakar notamment Sangaré, Maaouia, Barry, Diankh, et Thiécoumba. Ces derniers ont largement contribué à ma formation.

Enfin, je remercie ma femme, celle qui partage ma vie, d'avoir su me supporter tout au long de cette thèse et mes deux petits fils Mouhammad et Moustapha pour tout le bonheur qu'ils ont apporté dans ma vie au cours de ce projet.

Table des matières

Table des matières	vii
Liste des figures	ix
1 Préliminaires	1
1.1 Mutation des carquois, des graines et algèbres amassées	1
1.2 Algèbre amassée associée à une surface	10
1.3 Catégories amassées	19
1.4 Théorie d'Auslander-Reiten	24
2 Modules de Cohen-Macaulay sur des Singularités d'hypersurface	31
2.1 Modules de Cohen-Macaulay	32
2.2 Singularités	42
2.3 Factorisation de Matrices	46
3 Sur les algèbres de bords d'une surface marquée avec ponctions	55
3.1 Carquois avec potentiel	56
3.2 Construction de l'algèbre Jacobienne gelée provenant d'une surface de Rie- mann	61
4 Applications	79
4.1 Modules de Cohen-Macaulay sur Λ^0	80
4.2 Module inclinant amassé dans $\text{CM}(R_0 * G_{n+3})$	89

4.3 Modules de Cohen-Macaulay sur Λ^1	93
---	----

Liste des figures

1.1	Carquois Dynkin	3
1.2	Répétition de A_3	4
1.3	Représentation d'un arc étiqueté	13
1.4	Triangulation du digone à une ponction et son carquois associé Q_σ	15
1.5	Carquois de la catégorie dérivée $\mathcal{D}^b(\text{mod } kQ)$	29
1.6	Carquois de la catégorie amassée \mathcal{C}_{A_3}	30
3.1	Carquois avec potentiel associé à σ	62
3.2	Carquois gelé avec potentiel associé à une triangulation d'un heptagone.	63
3.3	Différents types de mailles obtenues dans $(Q_\sigma, \mathcal{W}_\sigma, \mathcal{F})$	64
3.4	Différents flips possibles	65
3.5	Mutation du carquois Q_0 en k	66
3.6	Carquois de $e_{\mathcal{F}}\Gamma_\sigma e_{\mathcal{F}}$ associée à $(P_{n+3,p})$	69
3.7	Triangulation du carré à une ponction $P_{4,1}$	73
3.8	Triangulation σ' et σ'' de $(P_{n+3,p})$	75
4.1	Structure des Λ -modules projectifs indécomposables.	81
4.2	Structure des modules indécomposables ${}^{g_i}M_j$	81
4.3	Mouvements élémentaires dans le sens horaire	85
4.4	Carquois de la catégorie stable $\underline{\text{CM}}(R_0 * G_{n+3})$	89
4.5	Carquois d'Auslander-Reiten de la catégorie amassée de type \mathbb{D}_4	102
4.6	Carquois d'Auslander-Reiten de la catégorie amassée de type \mathbb{D}_5	103

4.7	Carquois d'Auslander-Reiten de la catégorie stable $\underline{\text{CM}}(\mathbf{R}' * G_{n+3})$	104
4.8	Diagrammes commutatifs formés par les n premiers niveaux	105
4.9	Diagrammes commutatifs formés par les niveaux ν_n , ν_{n+1} et ν_{n+2}	106
4.10	Diagrammes commutatifs formés par les niveaux ν_{n+1} et ν_{n+2}	106
4.11	Cas i impair	107
4.12	Cas i pair	107
4.13	Cas $i = n + 3$ et n impair	107
4.14	Cas $i = n + 3$ et n pair	107

INTRODUCTION

En 2001, Fomin and Zelevinsky ont introduit une nouvelle classe d'algèbres, appelées *algèbres amassées*. Ces algèbres, apparues dans le but de donner un cadre combinatoire pour des phénomènes se produisant dans le contexte des groupes algébriques [Kas91], [Lus91], [Lus97], ont suscité l'intérêt de bon nombre de mathématiciens dans différents domaines, suite aux publications [FZ02], [FZ03a]. Ceci grâce à leurs riche structure combinatoire et leurs multiples liens avec d'autres branches des mathématiques telles que la géométrie de Poisson, la combinatoire, la théorie des représentations des algèbres de dimension finie, la physique mathématique et la théorie de Lie.

Dans le souci de mieux comprendre cette riche structure combinatoire, Buan-Marsh-Reineke-Reiten-Todorov [BMR⁺06] ont construit un cadre catégorique défini par une *algèbre de chemins héréditaires* $H = kQ$, où Q est un carquois acyclique. Leur but étant de trouver une interprétation aux concepts d'*amas*, de *variables amassées*, de *graines* et de *mutation* (dans \mathcal{A}_Q , algèbre amassée définie par le carquois Q) dans une catégorie ayant des propriétés additionnelles. Iyama-Yoshino [IY08] ont montré, en particulier, que dans une *catégorie triangulée* ayant les propriétés de *2-Calabi-Yau* et de l'existence d'objets *inclinants amassés*, il existe une mutation. Cette mutation est un concept essentiel à la catégorification. L'ensemble formé d'objets inclinants amassés dans ladite catégorie correspond bijectivement à l'ensemble formé des amas dans \mathcal{A}_Q [BMR⁺06]. Le choix d'une catégorie, dite *catégorie amassée*, permettant la catégorification de \mathcal{A}_Q peut se faire à partir de la catégorie des H -modules de type fini $\text{mod} H$. De très nombreux articles traitent du problème de catégorification d'algèbres amassées par des catégories amassées associées à un carquois acyclique [MRZ03], [BMR⁺06], [CC06], [CK06], [BMR07], [CK08]. L'idée de cette catégorification a été largement développée et généralisée dans plusieurs directions. Une de ces directions, donnée par Amiot, utilise un *carquois avec potentiel* (Q, \mathcal{W}) . Un élément potentiel \mathcal{W} dans Q est une combinaison linéaire peut-être infinie de *chemins cycliques* dans Q . Ce type de carquois, initialement introduit par Derksen-Weyman-Zelevinsky [DWZ08], définit une importante classe d'algèbres, appelé *algèbres*

*jacobien*es et notée $\Gamma = \mathcal{P}(Q, \mathcal{W})$. Certaines algèbres jacobienes peuvent aussi être construites à partir d’une *surface de Riemann*.

Partant d’une *triangulation* σ d’un polygone sans ponction $(P_{n+3,0})$, Caldero-Chapoton-Schiffler ont construit dans [CCS06] un carquois Dynkin de type A_n défini par $(P_{n+3,0})$ et ont montré que la structure combinatoire des triangulations de $(P_{n+3,0})$ correspond à celle de l’algèbre amassée associée au carquois A_n . L’idée d’associer à toute triangulation de surface un carquois Q_σ , dit *géométrique*, a été suivie en 2006 par Fomin-Shapiro-Thurston [FST08] dans le cas général d’une surface à bords marquée avec ponctions (S, M) . En 2010, Labardini-Fragoso associe, dans le cadre de la mutation, à toute triangulation σ de (S, M) un potentiel \mathcal{W}_σ . Il montre, comme dans [DWZ08], que le *flip* d’une triangulation est compatible avec la mutation d’un carquois avec potentiel. Ce résultat sera ensuite généralisé aux triangulations étiquetées [CILF12] [LF16].

Dans cette thèse, nous utilisons le carquois à potentiel gelé, défini par Buan-Iyama-Reiten-Smith [BIRS11], et la théorie des modules de Cohen-Macaulay sur une *singularité d’hypersurface isolée 1-Gorenstein* pour faire la catégorification des algèbres amassées $\mathcal{C}(A_n)$ et $\mathcal{C}(\mathbb{D}_{n+3})$. De nombreux articles parlent des liens existants entre la théorie des représentations des modules de Cohen-Macaulay et les catégories amassées, voir [KR08], [AIR15], [dVVdB16], [DL16a], [DL16b]. Mais nous proposons une méthode différente faisant appel aux notions d’action de groupe et de factorisations de matrices.

Le chapitre 1 est un rappel sur l’*algèbre amassée* associée à un carquois Q et les surfaces de bords marqués avec ponctions (S, M) .

Dans le chapitre 2, nous donnons au lemme 2.1.1 une caractérisation de ces modules de Cohen-Macaulay sur une algèbre 1-Gorenstein en termes de sous-modules d’un module projectif. Cela permet d’énoncer le théorème qui suit.

Théorème 0.0.1 (Théorème 2.1.6) *Soit A une k -algèbre 1-Gorenstein et G un groupe cyclique d’ordre n inversible dans A . Alors il existe une équivalence entre la catégorie des modules de Cohen-Macaulay sur l’algèbre de groupe gauche de G sur A et la catégorie de*

groupe gauche de la catégorie des modules de Cohen-Macaulay sur A , c'est-à-dire,

$$\mathrm{CM}(A * G) \cong \mathrm{CM}(A) * G$$

Ce théorème est un résultat important de cette thèse, car il permet, par le biais de l'action de groupe, d'utiliser plus tard au chapitre 4, les résultats déjà connus de la théorie des représentations sur la *singularité de Klein* R_p de type \mathbb{A}_n pour faire l'étude de celle de l'algèbre jacobienne à bords gelés associée à $(P_{n+3,p})$. De plus, il permet par cette même action de transférer les propriétés de 2-Calabi-Yau et de Frobenius retrouvées dans $\mathrm{CM}(R_p)$ dans la catégorie $\mathrm{CM}(R_p * G)$.

Soit \mathcal{F} l'ensemble des arcs de bords définis par les points marqués. Posons $e = \sum e_i$ la somme de tous les idempotents de bords. Utilisant l'algèbre jacobienne $\mathcal{P}(\sigma) = \Gamma_\sigma / \langle e \rangle$ définie par Labardini-Fragoso, Amiot [Ami09] a défini à partir d'une dg-algèbre de Ginzburg $G(\mathcal{P}(\sigma))$ une catégorie amassée $\mathcal{C}(G(\mathcal{P}(\sigma)))$ et a montré, dans le cas des polygones sans et avec une ponction, que cette catégorie est triangle équivalente à la catégorie $\underline{\mathrm{CM}}(B(\sigma))$, où $B(\sigma)$ est l'algèbre jacobienne à bords gelés associée à $(P_{n+3,p})$, pour chaque $p \in \{0, 1\}$. Sachant, d'après les travaux de Keller-Yang [KY11] et de Labardini-Fragoso [LF10], que dans le cas d'une surface de Reimann (S, M) quelconque la catégorie $\mathcal{C}(G(\mathcal{P}(\sigma)))$ est indépendante du choix de σ , alors une question naturelle importante se pose à savoir : *l'algèbre B_σ associée à la surface (S, M) dépend-elle de la triangulation σ ?*. La réponse à cette question est formulée dans le théorème qui suit. Ce théorème est le résultat principal de cette thèse.

Théorème 0.0.2 (Théorème 3.2.1) *Soit σ une triangulation d'une surface à bords marqués avec ponctions (S, M) . L'algèbre jacobienne à bords gelés $e_{\mathcal{F}} \Gamma_\sigma e_{\mathcal{F}}$ associée à (S, M) est indépendante du choix de σ , à isomorphisme près.*

En particulier, nous utilisons une version adaptée du carquois à potentiel gelé associé à $(P_{n+3,p})$, introduite dans [DL16a], pour déterminer l'algèbre jacobienne à bords gelés sous forme d'algèbre de groupe gauche d'un groupe cyclique

$$G = G_{n+3} = \left\{ \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix} \mid \zeta = e^{i \frac{2k\pi}{n}}, \text{ où } k = 1, 2, \dots, n+3 \right\} \quad (0.0.1)$$

sur une singularité $R_p = k[[x, y]]/x^2 = x^p y^{n+1+p}$:

Théorème 0.0.3 (Théorème 3.2.6) *Soit $p \in \mathbb{N}$ et σ une triangulation du polygone à p -ponctions $(P_{n+3,p})$. L'algèbre jacobienne à bords gelés associée, notée $e_{\mathcal{F}}\Gamma_{\sigma}^p e_{\mathcal{F}}$, est isomorphe à l'algèbre de groupe gauche $R_p * G_{n+3}$, c'est-à-dire,*

$$e_{\mathcal{F}}\Gamma_{\sigma}^p e_{\mathcal{F}} \cong (k[[x, y]]/x^2 = x^p y^{n+1+p}) * G_{n+3}.$$

En particulier, pour $p = 0, 1$, R_p est une singularité de Klein de type \mathbb{A}_n et \mathbb{A}_{2n+3} , respectivement.

Enfin, nous procédons, au chapitre 4, à la catégorification des algèbres amassées de types \mathbb{A}_n et \mathbb{D}_{n+3} . La première section étudie et décrit le carquois d'Auslander-Reiten de l'algèbre jacobienne gelée de bords $e_{\mathcal{F}}\Gamma_{\sigma}^0 e_{\mathcal{F}}$ en donnant une forme explicite linéaire algébrique des modules de Cohen-Macaulay ainsi que les suites presque scindées (Proposition 4.1.1) dans $\text{CM}(R_0 * G_{n+3})$ tandis que la deuxième utilise les résultats de la première pour faire l'étude de $R_1 * G_{n+3}$ via la relation $z_i = 2x_i - \prod_{k=1}^{n+1+p} y_{i+k}$. Pour cela nous proposons deux approches différentes : la première s'inspire partiellement de Demonet-Luo et utilise le résultat de Keller-Reiten [KR08, Théorème 2.1.] tandis que la deuxième utilise certains résultats de Yoshino [Yos90] pour donner une description linéaire algébrique des arcs étiquetés en termes de modules de Cohen-Macaulay et mouvements élémentaires, décrits par R. Schiffler [Sch08], dans $(P_{n+3,1})$.

Le théorème qui suit résume les différents résultats de ce chapitre.

Théorème 0.0.4 (Théorème 4.1.1, 4.1.1 4.1.2 4.2.1, 4.2.2 4.3.2 4.3.3, 4.3.3) *Soit $p \in \{0, 1\}$ fixé, σ_p une triangulation étiquetée du polygone $(P_{n+3,p})$, $d_{i,(i+1)+j}$ un arc éti-*

queté et $z_i = 2x_i - \prod_{k=1}^{n+1+p} y_{i+k}$. Notons $x_{i,p} = \begin{cases} x_i & \text{si } p=0 \\ z_i & \text{si } p=1 \end{cases}$ et posons

$$G = G_{n+3} = \left\{ \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix} \mid \zeta = e^{i\frac{2k\pi}{n+3}}, \text{ où } k = 1, 2, \dots, n+3 \right\}.$$

Alors

(1) L'ensemble des $(R_p * G)$ -modules de Cohen-Macaulay indécomposable, à isomorphisme près, est donné par

$$E_p = \{ {}^{g_i}M_j = \langle x_{i,p}, \prod_{k=1}^j y_{i+k} \rangle : 0 \leq j \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil; 1 \leq i \leq |G| \} \cup p. \{ {}^{g_i}N^\pm = \langle +iz_i \pm \prod_{k=1}^{n+2} y_{i+k} \rangle \}.$$

(2) L'application $d_{i,(i+1)+j}^\pm \mapsto \begin{cases} {}^{g_i}M_j^\pm & \text{si } p = 1 \\ {}^{g_i}M_j & \text{sinon} \end{cases}$ qui associe à tout sommet de Q_{σ_p} un $R_p * G$ -module de Cohen-Macaulay établit des correspondances bijectives :

$$\{ \text{Côtés et arcs } d_{i,(i+1)+j} \} \longleftrightarrow \{ \text{isoclasses de CM}(R_p * G)\text{-modules indécomposables } \langle x_{i,p}, \prod_{k=1}^j y_{i+k} \rangle \},$$

$$\{ \text{Côtés } d_{i,(i+1)} \} \longleftrightarrow \{ \text{isoclasses de CM}(R_p * G)\text{-modules projectifs indécomposables } \langle x_{i,p}, e_{i+1} \rangle \},$$

$$\{ \text{Triangulations } \sigma_p \} \longleftrightarrow \{ \text{isoclasses de CM}(R_p * G)\text{-modules inclinants amassés } \Gamma_\sigma^p e_F \},$$

$$\{ \text{Mouvements élémentaires} \} \longleftrightarrow \{ \text{isoclasses de CM}(R_p * G)\text{-morphisms irréductibles} \},$$

telle que, si $p = 0$, alors j varie entre 0 et $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ suivant la parité de n et, si $p = 1$, il varie entre 0 et $n + 2$.

(3) Pour tout module inclinant amassé $\Gamma_\sigma^p e_F = \bigoplus_{\mathcal{F} \cup \bar{\mathcal{F}}} \langle x_i, \prod_{k=1}^j y_{i+k} \rangle$ et pour chaque $p = 0, 1$, il existe une correspondance bijective

$$\text{End}_{R_p * G_{n+3}}(\Gamma_\sigma^p e_F) \simeq (\Gamma_\sigma^p)^{op}.$$

(4) Il existe une équivalence triangulée

$$\underline{\text{CM}}(R_p * G_{n+3}) \simeq \mathcal{C}(kQ), \quad (0.0.2)$$

où $Q = \mathbb{A}_n$, pour $p = 0$ et $Q = \mathbb{D}_{n+3}$ pour $p = 1$.

(5) Le carquois $(\Gamma(\Lambda^1), \tau_1')$ est un carquois à translation stable et est isomorphe au carquois d'Auslander-Reiten de la catégorie amassée de type \mathbb{D}_{n+3} .

Chapitre 1

Préliminaires

Nous rappelons quelques notions auxquelles nous allons nous intéresser et énonçons quelques résultats de Fomin-Zelevinsky [FZ02] sur les *algèbres amassées* associées à un *bon carquois* Q . Nous introduisons ensuite les *surfaces à bords marqués avec ponctions* (S, M) et énonçons quelques résultats de Fomin-Shapiro-Thurston [FST08] sur les algèbres amassées associées à (S, M) . Enfin, nous présentons la construction de la *catégorie amassée* associée à Q et utilisons la *théorie d’Auslander-Reiten* pour faire sa description.

1.1 Mutation des carquois, des graines et algèbres amassées

Les *algèbres amassées* de Fomin-Zelevinsky [FZ02], introduites en 2001, sont construites à partir d’un procédé combinatoire, appelé *mutation*. Cette mutation, définie initialement sur des matrices, s’applique aussi bien sur un graphe orienté appelé *carquois* que sur une famille de variables appelé *amas*. Ces variables, dites *variables amassées*, sont définies de manière récursive par mutation de carquois. Le lien entre mutation de carquois et celle de Fomin-Zelevinsky se fait à l’aide des *matrices d’incidence* de carquois. Cette correspondance est rendue possible du fait que les carquois considérés ici sont de *bons carquois*, c’est-à-dire *fini* sans *boucle* ni *2-cycle*. Pour plus de détail, le lecteur peut se

référer à [FZ02], [FZ03a], [BFZ05], [FZ07].

Définition 1.1.1 Un *carquois* est un quadruplet $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ formé d'un ensemble de sommets Q_0 , d'un ensemble de flèches Q_1 et de deux applications $s, t : Q_1 \rightarrow Q_0$ qui, à une flèche α , associent respectivement sa source $s(\alpha)$ et son but $t(\alpha)$.

Le carquois Q est dit fini si Q_0 et Q_1 sont des ensembles finis.

La figure 1.1 qui suit présente un ensemble de graphes particuliers non orientés. Dans cette liste, chaque orientation possible donne un carquois de type Dynkin.

Un *chemin* de longueur $l \geq 1$ dans Q est une suite de flèches $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{l-1} \alpha_l$ telles que $s(\alpha_i) = t(\alpha_{i-1})$, pour tout $i = 1, 2, \dots, l$. Un p -cycle est un chemin de longueur $p \geq 1$

$$i_1 \xrightarrow{\alpha_1} i_2 \xrightarrow{\alpha_2} i_3 \longrightarrow \dots \longrightarrow i_p \xrightarrow{\alpha_p} i_{p+1} = i_1$$

tel que $s(\alpha_1) = t(\alpha_p)$. Un 1 -cycle ou boucle est donc une flèche dont la source et le but coïncident, et un 2 -cycle un couple de flèches distinctes α, β telles que $s(\alpha) = t(\beta)$ et $t(\alpha) = s(\beta)$. Un sommet k d'un carquois est une *source* (respectivement un *puit*) s'il n'existe aucune flèche de but k (respectivement de source k). Un carquois sans p -cycle, pour tout p , est dit *acyclique*. Un carquois Q est dit *bon carquois* s'il est fini sans boucle ni 2 -cycle tel que $Q_0 \subset \mathbb{N}$. Une *matrice d'incidence* de Q , notée B_Q , est définie, à permutation des sommets près, par la matrice antisymétrique $(b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ dont le coefficient b_{ij} est la différence : nombre de flèches de i vers j moins le nombre de flèches de j vers i , pour tout $1 \leq i, j \leq |Q_0|$. Inversement, toute matrice antisymétrique B à coefficients entiers provient d'un bon carquois Q_B .

Définition 1.1.2 Soit Q un carquois fini et acyclique. La *répétition* de Q est le carquois infini $\mathbb{Z}Q$ tel que

$$(\mathbb{Z} \times Q)_0 = \{(n, i) \mid n \in \mathbb{Z}, i \in Q_0\},$$

$$(\mathbb{Z} \times Q)_1 = \{(n, i) \xrightarrow{(n, \alpha)} (n, j) \mid n \in \mathbb{Z}, \alpha \longrightarrow j\} \cup \{(n, j) \xrightarrow{(n, \alpha')} (n-1, i) \mid n \in \mathbb{Z}, \alpha' = -\alpha\}$$

Exemple 1.1.1 Soit Q le carquois Dynkin de type A_3 qui suit $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$. La répétition de Q se présente comme dans la figure 1.1.1 qui suit.

$$\mathbb{A}_n(n \geq 1) : 1 \text{ --- } 2 \text{ --- } 3 \text{ --- } \dots \text{ --- } (n-1) \text{ --- } n$$

$$\mathbb{D}_n(n \geq 4) : \begin{array}{ccccccc} & & 2 & & & & \\ & & | & & & & \\ 1 & \text{---} & 3 & \text{---} & 4 & \text{---} & \dots \text{ --- } (n-1) \text{ --- } n \end{array}$$

$$\mathbb{E}_6 : \begin{array}{ccccccc} & & & & 4 & & \\ & & & & | & & \\ 1 & \text{---} & 2 & \text{---} & 3 & \text{---} & 5 \text{ --- } 6 \end{array}$$

$$\mathbb{E}_7 : \begin{array}{ccccccc} & & & & 4 & & \\ & & & & | & & \\ 1 & \text{---} & 2 & \text{---} & 3 & \text{---} & 5 \text{ --- } 6 \text{ --- } 7 \end{array}$$

$$\mathbb{E}_8 : \begin{array}{ccccccc} & & & & 4 & & \\ & & & & | & & \\ 1 & \text{---} & 2 & \text{---} & 3 & \text{---} & 5 \text{ --- } 6 \text{ --- } 7 \text{ --- } 8 \end{array}$$

FIGURE 1.1 – Carquois Dynkin

Un autre exemple de carquois intéressant est le *carquois à translation stable*. Ce type de carquois permet de décrire les catégories amassées de types $\mathcal{C}(A_n)$ et $\mathcal{C}(D_n)$ auxquelles on s'intéressera au chapitre 4.

La définition qui suit est donnée dans [Sch08]. Celle-ci est une version adaptée de celle originellement donnée dans [Rie80].

Définition 1.1.3 *Un **carquois à translation** est un couple (Q, τ) , formé d'un carquois*

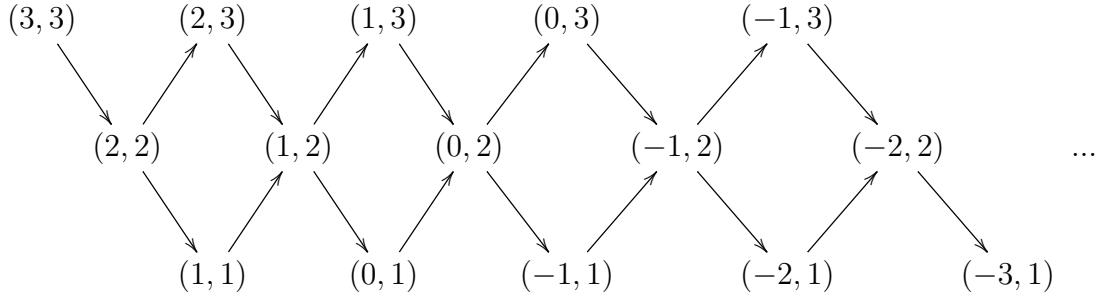


FIGURE 1.2 – Répétition de \mathbb{A}_3

sans boucle Q et d'une injection $\tau : Q'_0 \longrightarrow Q_0$, appelée **translation**, définie sur Q'_0 telle que, pour tout $x \in Q_0$ et $y \in Q'_0$, le nombre de flèches de x vers y est égal au nombre de flèches de $\tau(y)$ vers x . Si $Q'_0 = Q_0$ et τ une bijection, le couple (Q, τ) est appelé **carquois à translation stable**.

Lemme 1.1.1 Soit Q un carquois fini et acyclique et τ une translation dans $\mathbb{Z}Q$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $i \in Q_0$,

$$\tau(n, i) = (n + 1, i).$$

Alors $(\mathbb{Z}Q, \tau)$ est un carquois à translation stable.

Démonstration 1.1.1 [*Hap88*, Page 53]

Définition 1.1.4 Un **morphisme** de carquois $\pi : Q \rightarrow Q'$ est une application définie telle que, pour toute flèche α de Q_1 , on a $\pi(s(\alpha)) = s(\pi(\alpha))$ et $\pi(t(\alpha)) = t(\pi(\alpha))$. Un **isomorphisme** de carquois est un morphisme de carquois bijectif. Un morphisme de carquois à translation est un morphisme de carquois qui est compatible avec les translations. Autrement dit, $f : (Q, \tau_1) \longrightarrow (Q', \tau_2)$ est un morphisme de carquois à translation si, et seulement, si $\tau_2(f(i)) = f(\tau_1(i))$, pour tout $i \in Q_0$. Un automorphisme de carquois à translation est un homomorphisme de carquois à translation bijectif de (Q, τ) sur lui-même.

Étant donné un corps k et un carquois Q , on peut construire une algèbre, à partir des chemins de Q , dite *algèbre de chemins*, comme suit.

Définition 1.1.5 *L'algèbre de chemins kQ est définie comme le k -espace vectoriel sous-jacent admet pour base l'ensemble de tous les chemins de Q incluant le chemin e_i de longueur nulle, pour tout $i \in Q_0$, et tel que le produit de deux chemins $\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$ et $\beta_1\beta_2\dots\beta_m$ est défini par concaténation, c'est-à-dire, est égal à $\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\beta_1\beta_2\dots\beta_m$ si $t(\alpha_n) = s(\beta_1)$ et est nul sinon. Par linéarité, le produit se prolonge dans kQ .*

Exemple 1.1.2 *Considérons le carquois Q qui suit :*

$$Q : \alpha \curvearrowright 1.$$

Une base de kQ étant donnée par $\{e_1, \alpha^n, n \in \mathbb{N}\}$, alors il suit que kQ est isomorphe à l'algèbre des polynômes $k[x]$ en la variable x .

Soit Q un bon carquois. On suppose que Q est connexe.

Définition 1.1.6 *La **mutation** de Q dans la direction $k \in Q_0$ est le nouveau carquois, noté $\mu_k(Q)$, dont les sommets sont ceux de Q , obtenu à partir de Q en effectuant les 3 opérations suivantes :*

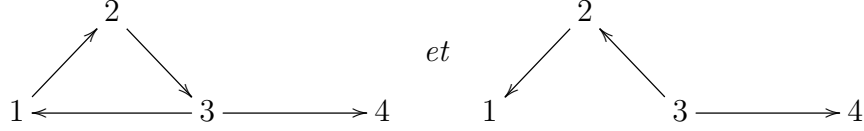
1. *Pour tout chemin de la forme $i \xrightarrow{\alpha} k \xrightarrow{\beta} j$, On ajoute une nouvelle flèche $i \xrightarrow{\lambda} j$;*
2. *On change le sens de toutes les flèches incidentes à k ;*
3. *On supprime les flèches d'un ensemble maximal de 2-cycles deux à deux disjoints.*

Si B est la matrice antisymétrique associée au carquois Q et $B' = (b'_{ij})$ celle associée au carquois $Q' = \mu_k(Q)$, alors on a

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & \text{si } i=k \text{ ou } j=k \\ b_{ij} + \text{sgn}(b_{ij})\max(0, b_{ik}b_{kj}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est la règle de mutation des matrices antisymétriques introduite par Fomin-Zelevinsky dans [FZ02], voir aussi [GLS05].

Exemple 1.1.3 On vérifie sans peine que μ_k est une involution. Par exemple, les carquois



sont liés par la mutation par rapport au sommet 2.

Définition 1.1.7 Deux carquois Q et Q' sont dits **équivalents** par mutation et on note $Q \sim Q'$ s'ils sont reliés par une suite finie de mutations, c'est-à-dire, il existe une suite (k_1, k_2, \dots, k_n) de sommets de Q telle que $Q' = \mu_{k_1} \mu_{k_2} \dots \mu_{k_n}(Q)$. La classe d'équivalence de Q pour la relation \sim , appelée classe de mutation de Q , est notée

$$\text{Mut}(Q) = \{\text{Carquois } Q' \mid Q \sim Q'\}.$$

Le carquois Q est dit de **mutation finie** si l'ensemble $\text{Mut}(Q)$ est fini.

Exemple 1.1.4 Les carquois à deux sommets $Q : 1 \xrightarrow{n} 2$, où le $n \geq 2$ signifie qu'il existe n flèches de source 1 et de but 2, sont de mutations finie. En effet, quelque soit le sommet auquel on mute on obtient toujours le carquois opposé $Q^{\text{op}} : 1 \xleftarrow{n} 2$. Donc Q et Q^{op} sont les seuls carquois obtenus en appliquant des suites arbitraires de mutations sur Q . Toutefois, la plupart des carquois ont une classe de mutation infinie.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et \mathcal{F} le corps des fractions rationnelles $\mathbb{Q}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ engendré par les n indéterminées x_1, x_2, \dots, x_n .

Définition 1.1.8 Une **graine**, appelée aussi **X -graine**, est un couple (Q, \underline{u}) , où Q est un bon carquois et \underline{u} une suite u_1, u_2, \dots, u_n d'éléments de \mathcal{F} qui engendre librement le corps \mathcal{F} , appelé **corps ambiant**. Si (Q, \underline{u}) est une graine et k un sommet de Q , la **mutation** $\mu_k(Q, \underline{u})$ est la nouvelle graine (Q', \underline{u}') , où $Q' = \mu_k(Q)$ et \underline{u}' est obtenu à partir de \underline{u} en remplaçant l'élément u_k par l'élément u'_k défini par la **relation d'échange**

$$u_k u'_k = \prod_{s(\alpha)=k} u_{t(\alpha)} + \prod_{t(\alpha)=k} u_{s(\alpha)}. \quad (1.1.1)$$

Une vérification rapide montre que $\mu_k(Q, \underline{u})$ est aussi involutif. Par exemple, les mutations de la graine

$$Q : 1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3, \underline{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$$

en les sommets 1 et 2 ,respectivement, donnent les graines

$$1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3, \left\{ \frac{1+x_2}{x_1}, x_2, x_3 \right\} \quad \text{et} \quad 1 \overset{\curvearrowright}{\longrightarrow} 2 \longrightarrow 3, \left\{ x_1, \frac{x_1+x_3}{x_2}, x_3 \right\}. \quad (1.1.2)$$

Soit Q un carquois, où $Q_0 = \{1, 2, \dots, n\}$. Une graine initiale associée à Q est donnée par le couple $(Q, \underline{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\})$. La suite $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est appelée *amas initial* de Q . Cette graine engendre les autres graines (Q', \underline{x}') de Q par une suite finie de mutations. La suite \underline{x}' est alors appelée *amas associé* à Q tandis que les éléments des amas sont appelés *variables amassées*. On note que tous les amas sont de même cardinal ou rang n . Soit \mathfrak{X} l'ensemble de toutes les variables amassées.

Définition 1.1.9 *L'algèbre amassée de rang n associée au carquois Q , notée $\mathcal{A}_Q(\mathfrak{X})$, de graine initiale (Q, \underline{x}) est la \mathbb{Z} -sous-algèbre de \mathcal{F} engendrée par tous les élément de \mathfrak{X} .*

L'algèbre amassée $\mathcal{A}_Q(\mathfrak{X})$ est un invariant de la classe de mutations de Q . Cette invariance vient du fait que si (Q', \underline{x}') est une autre graine associée à Q , alors l'isomorphisme naturel

$$\mathbb{Q}'(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \rightarrow \mathbb{Q}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

induit un isomorphisme d'algèbres de $\mathcal{A}_{Q'}(\mathfrak{X})$ sur $\mathcal{A}_Q(\mathfrak{X})$ qui préserve les amas et les variables amassées. En particulier, les algèbres $\mathcal{A}_{Q'}(\mathfrak{X})$ et $\mathcal{A}_Q(\mathfrak{X})$ sont égales.

Exemple 1.1.5 *L'algèbre amassée de rang 2 associée au carquois $A_2 : 1 \leftarrow 2$, de graine initiale $(Q, \{x_1, x_2\})$, est engendrée par les variables d'amas y_m , $m \in \mathbb{Z}$, soumises aux relations d'échange*

$$y_{m-1}y_{m+1} = 1 + y_m, m \in \mathbb{Z}.$$

Cette relation s'obtient en commençant à effectuer la mutation par rapport au sommet 1 avec comme variables initiales $y_1 = x_1$ et $y_2 = x_2$. Cette relation se traduit, en commençant

à effectuer la mutation par rapport au sommet 2, par

$$z_m z_{m+1} = 1 + z_{m-1}, m \in \mathbb{Z}.$$

Dans tous les deux cas, on aura le même ensemble de variables amassées, c'est-à-dire, $\{y_m | m \in \mathbb{Z}\} =: \mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_2 := \{z_m | m \in \mathbb{Z}\}$. Dans le premier cas, les amas sont donnés par les paires de variables consécutives $\{x_m, x_{m+1}, m \in \mathbb{Z}\}$. L'amas initial est $\{x_1, x_2\}$ et deux amas sont reliés par une mutation si et seulement si ils ont exactement une variable d'amas en commun. Les relations d'échange permettent d'exprimer toute variable d'amas comme fonction rationnelle des variables initiales $\{x_1, x_2\}$ et donc d'identifier l'algèbre $\mathcal{A}_{A_2}(\mathfrak{X})$ à une sous-algèbre du corps $\mathbb{Q}(x_1, x_2)$. Afin d'expliciter cette sous-algèbre, calculons les x_m pour $m \geq 3$. Nous avons :

$$x_3 = \frac{1 + x_2}{x_1} \tag{1.1.3}$$

$$x_4 = \frac{1 + x_3}{x_2} = \frac{x_1 + 1 + x_2}{x_1 x_2} \tag{1.1.4}$$

$$x_5 = \frac{1 + x_4}{x_3} = \frac{x_1 x_2 + x_1 + 1 + x_2}{x_1 x_2} \div \frac{1 + x_2}{x_1} = \frac{1 + x_1}{x_2} \tag{1.1.5}$$

$$x_6 = \frac{1 + x_5}{x_4} = \frac{x_2 + 1 + x_1}{x_2} \div \frac{x_1 + 1 + x_2}{x_1 x_2} = x_1 \tag{1.1.6}$$

$$x_7 = (1 + x_1) \div \frac{1 + x_1}{x_2} = x_2. \tag{1.1.7}$$

Les calculs précédentes montrent que la suite des x_m , $m \in \mathbb{Z}$ est périodique de période $T = 5$. L'ensemble des variables amassées \mathfrak{X} est donc formé des variables initiales x_1 et x_2 et des variables x_3 , x_4 et x_5 définies par la mutation. La classe de mutation du carquois A_2 est finie, elle contient exactement le carquois A_2 et son carquois opposé A_2^{op} .

L'exemple 1.1.5 précédent est un cas particulier d'algèbre amassée engendrée par un nombre fini de variables amassées. Il existe des algèbres amassées engendrées par un nombre infini de variables amassées. Une algèbre amassée $\mathcal{A}_Q(\mathfrak{X})$ est dite de *type fini* si l'ensemble \mathfrak{X} est fini. La finitude du type de $\mathcal{A}_Q(\mathfrak{X})$ dépend de son carquois Q associé. La classification des algèbres amassées de type fini est un problème qui a suscité beaucoup d'intérêt dans l'étude des algèbres amassées. Ce problème a été résolu par Fomin-Zelevinsky dans le théorème qui suit.

Théorème 1.1.1 [FZ02] *Soit un bon carquois Q . L'algèbre amassée $\mathcal{A}_Q(\mathfrak{X})$ est de type fini si, et seulement si, Q est équivalent par mutation à un carquois de type Dynkin.*

Une algèbre amassée $\mathcal{A}_Q(\mathfrak{X})$ de graine initiale (Q, \underline{x}) est dite de **type de mutation finie** si Q est un carquois de mutations finie. On note que toute algèbre amassée de type fini est de type de mutation finie, mais la réciproque est fausse. Par exemple, le carquois de Kronecker généralisé dans l'exemple 1.1.4 d'ensemble d'indéterminés $\underline{x} = \{x_1, x_2\}$ est de mutation finie, mais $\mathcal{A}_Q(\mathfrak{X})$ est de type infini.

Dans l'exemple 1.1.5, on remarque également que tous les variables amassées se présente sous forme de fractions rationnelles en les x_i . Dans ces fractions, on note que le dénominateur est toujours un monôme. De plus, on remarque que toutes ces fractions sont à coefficients entiers positifs. Ces observations sont, connues sous le nom de *phénomène de Laurent*, sont formulées dans le de Fomin-Zelevinsky [FZ02] qui suit. Soient $n \geq 1$ un entier, $\mathcal{F} = \mathbb{Q}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ le corps des fractions rationnelles engendrées par les indéterminés x_1, x_2, \dots, x_n , et $\underline{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$; On désigne par $\mathbb{Z}[\underline{x}^\pm] = \mathbb{Z}[x_1^\pm, x_2^\pm, \dots, x_n^\pm]$ l'anneau des polynômes de Laurent à coefficients entiers et a variables dans \underline{x} .

Théorème 1.1.2 (Phénomène Laurent) *Soit (Q, \underline{x}) une graine initiale. Alors l'algèbre amassée $\mathcal{A}_Q(\mathfrak{X})$ est une sous algèbre de $\mathbb{Z}[\underline{x}^\pm]$, c'est-à-dire, pour toute variable amassée x et pour tout amas $\underline{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, la variable amassée x est un polynôme de Laurent à coefficients entiers, c'est-à-dire, s'écrit sous la forme*

$$x = \frac{p(u_1, \dots, u_n)}{\prod_{k=1}^n u_k^{\alpha_k}}$$

avec $\alpha_k \in \mathbb{Z}^+$, pour tout $1 \leq k \leq n$, et $p(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{Z}[\underline{u}] = \mathbb{Z}[u_1, u_2, \dots, u_n]$.

Démonstration 1.1.2 [FZ02, Théorème 3.1]

Théorème 1.1.3 (Conjecture de positivité) *Soit (Q, \underline{x}) une graine initiale. Alors, pour tout amas $\underline{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, chaque variable amassée de $\mathcal{A}_Q(\mathfrak{X})$ est un polynôme de Laurent de x_1, x_2, \dots, x_n à coefficients entiers positifs, c'est-à-dire, $\mathfrak{X} \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 0}[\underline{x}^\pm]$.*

Cette conjecture de Fomin-Zelevinsky a été résolue dans plusieurs cas, à savoir pour les carquois de type \mathbb{A}_n et \mathbb{D}_n . Puis elle a été montrée pour tout carquois admettant une orientation bipartite [Nak11], c'est-à-dire une orientation où tout sommet est une source ou un puits. De plus, elle a été démontrée dans [MSW11] pour tous les carquois associés à des surfaces de bords marquées [FST08] et dans [DFK09] pour les carquois associés au T -système de type \mathbb{A} . Elle a été aussi démontrée dans [LS15] pour tout bon carquois Q .

1.2 Algèbre amassée associée à une surface

En 2006, Fomin-Shapiro-Thurston ont introduit un nouveau type de carquois, appelé *carquois géométriques*. Leur but était de trouver des liens existants entre *triangulations* de surfaces et structures amassées. L'idée principale était d'associer un carquois à une *surface triangulée* à l'aide d'un procédé combinatoire.

Toutes les définitions énoncées dans cette section sont dans [FST08].

Définition 1.2.1 Une **surface à bords marqués avec ponctions** est un couple (S, M) formé d'une surface de Riemann de dimension deux S , connexe, orientable et à bord, et d'un ensemble de points M . Les points de M situés sur le bord de S , noté ∂S , sont appelés **points marqués** et ceux contenus dans l'intérieur de S , noté $\text{int}(S)$, sont appelés **ponctions**.

Dans cette définition, on exclut toute surface n'admettant pas de triangulation possible ou n'ayant qu'une seule triangulation possible. Pour cela, on suppose que l'ensemble M est non vide et que chaque composante de bord possède au moins un point marqué. De plus, on exclut d'autres types de surface comme dans [FST08], à savoir :

- (a) la sphère à 1 ou 2 ponctions ;
- (b) le disque à 1 point marqué et 0 ou 1 ponction ;
- (c) le disque à 2 ou 3 points marqués et 0 ponction ;

La surface (S, M) est, à homéomorphisme près, définie par :

- (1) le *genre* g de la surface de Riemann initiale ;
- (2) le nombre b de composantes de bords ;
- (3) le nombre de points marqués sur chaque composante de bords ;
- (4) le nombre p de ponctions.

Exemple 1.2.1 *Le $(n + 3)$ -gone à p ponctions $(P_{n+3,p})$ est un cas particulier de surface à bords marqués avec ponction de genre nul. Dans ce cas, la surface S associée à $(P_{n+3,p})$ est un disque de rayon $r > 0$ défini par*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq r^2\}$$

dont la frontière ∂_S est définie par l'équation $x^2 + y^2 = r^2$ tandis que l'intérieur $\text{int}(S)$ est donné par l'inéquation $x^2 + y^2 < r^2$. L'ensemble M , quant à lui, contient $n + 3 + p$ points marqués distincts dont $n + 3$ sur la frontière ∂_S et p dans l'intérieur $\text{int}(S)$.

1.2.1 Les arcs : simples et étiquetés

Les *arcs simples* sont un cas particulier d'*arcs étiquetés*. Les arcs étiquetés permettent de diviser une surface de bords marqués avec ponctions en des *triangles étiquetés*. L'étiquetage des arcs a été introduit pour résoudre un problème d'incompatibilité observé entre mutation de carquois et *flip* d'une *triangulation* de surface. Le but était d'établir une correspondance bijective entre le nombre d'amas en les variables amassés et le nombre de triangulations étiquetées de (S, M) .

Définition 1.2.2 *Un **arc simple** dans (S, M) est une courbe dans S , c'est-à-dire, l'image $\delta([0, 1])$ d'une fonction continue $\delta : [0, 1] \rightarrow S$, où $\delta([0, 1])$ satisfait aux conditions suivantes :*

- (1) δ ne s'intersecte pas dans l'intérieur de S , c'est-à-dire, $\delta(a) \neq \delta(b)$, pour tous a, b distincts dans $]0, 1[$;
- (2) les extrémités $\delta(0)$ et $\delta(1)$ de δ sont des points marqués dans M ;

- (3) à l'exception de ses extrémités, δ est disjoint de la frontière ∂_S de S et ne touche à aucun point marqué de M , c'est-à-dire, $\delta :]0, 1[\subset (\text{int}(S) \setminus M)$;
- (4) δ n'est pas contractile dans M ni sur ∂_S , autrement dit, δ ne délimite pas de 1-gone sans ou avec ponction ni ne délimite de 2-gone sans ponction dans celui-ci.

Un arc étiqueté est une généralisation d'un arc simple. L'étiquetage d'un arc consiste à matérialiser les *bouts* des arcs avec des deux types d'étiquettes : "plain" (simple) et "notched" (entaillé)

Définition 1.2.3 Un *arc étiqueté* dans (S, M) est un arc simple dont chaque bout est étiqueté soit simple soit entaillé tel que les trois conditions suivantes soient satisfaites :

- (1) l'arc ne délimite pas un 1-gone à 1-ponction ;
- (2) le bout qui voisine la frontière ∂_S de S est étiqueté simple ;
- (3) les extrémités de l'arc, formant une boucle, sont étiquetées de la même façon.

Par définition, la surface (S, M) contient un nombre infini d'arcs. On note que la plupart d'entre eux sont *isotopes*. L'isotopie est un cas particulier d'*homotopie*, c'est-à-dire une déformation continue d'un objet à un autre.

Définition 1.2.4 Deux arcs étiquetés $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$ et $\rho : [0, 1] \rightarrow S$ sont **équivalents** ou **isotopes** si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- (1) il existe une fonction continue $i : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S$, où $i(0, t) = \gamma(t)$ et $i(1, t) = \rho(t)$ telles que, pour tout $s \in]0, 1[$, $i(s, t) = \alpha(t)$ soit un arc dans (S, M) . En particulier, γ et ρ relient les mêmes points marqués ;
- (2) leurs étiquettes aux points marqués sont identiques.

Dans la suite, nous regroupons les arcs en *classe d'isotopie*. Deux arcs sont dans une même classe d'isotopie si on peut déformer l'un à l'autre de manière continue sans déplacer leurs extrémités.

Remarque 1.2.1 *Cette définition est valable aussi pour les arcs simples ou non étiquetés. Dans ce cas, il suffit d'ignorer la condition (2).*

On note que les arcs incidents en une ponction peuvent être étiquetés d'une des deux façons au voisinage de celle-ci. Par convention, un bout étiqueté "simple" ne porte pas de symbole tandis qu'un bout étiqueté "entaillé" est matérialisé par un nœud papillon \bowtie . L'ensemble de tous les arcs étiquetés de (S, M) est noté $A^\bowtie(S, M)$ et celui des arcs simples $A^\circ(S, M)$. De manière générale, l'ensemble $A^\circ(S, M)$ est infini. Les seuls cas où $A^\bowtie(S, M)$ est fini sont les cas d'un n -gone sans ponction ou avec 1 ponction [FST08, Proposition 2.3]. La figure 1.3 montre qu'il existe une application canonique τ de $A^\circ(S, M)$ dans $A^\bowtie(S, M)$.



FIGURE 1.3 – Représentation d'un arc étiqueté

Par abus de langage le mot "arc" désignera par défaut "arc étiqueté", sauf mention contraire. Puisque les arcs sont considérés à isotopie près, alors chaque γ de $A^\bowtie(S, M)$ appartient à l'un et seulement un des cinq types suivants, [FST08, Remarque 7.3]

- I) L'arc γ relie deux points marqués distincts P_i et P_j sur la frontière ∂_S , ses deux étiquettes sont simples ;
- II) L'arc γ forme une boucle d'extrémité P_i sur la frontière ∂_S , ses deux étiquettes voisinant P_i sont simples
- III) L'arc γ relie un point marqué P_i sur la frontière ∂_S à une ponction p_j dans l'intérieur $Int(S)$, ses deux étiquettes sont soit simples soit l'étiquette voisinant P_i est simple et l'autre, voisinant p_j , entaillée ;
- IV) L'arc γ relie deux ponctions distinctes p_i et p_j dans $Int(S)$, ses deux étiquettes sont soit identiques (simples ou entaillées) soit l'une simple et l'autre entaillée ;

V) L'arc γ forme une boucle d'extrémité p_i dans l'intérieur $Int(S)$, ses deux étiquettes sont identiques.

Par exemple, dans le cas du polygone $(P_{n+3,0})$, il y a exactement $\frac{n(n+3)}{2}$ arcs étiquetés de type **I**) tandis que, dans le cas d'un polygone à une ponction $(P_{n+3,1})$ il y a exactement $(n+3)^2 - 2(n+3)$ arcs étiquetés de type **I** et $2(n+3)$ arcs étiquetés de type **III** dont $(n+3)$ simples.

1.2.2 Compatibilité des arcs

Le partage de la surface (S, M) en triangles étiquetés se fait avec des arcs particuliers, à savoir des *arcs compatibles*. L'idée est d'éviter de générer d'autres sommets dans $int(S) \setminus M$ en divisant (S, M) . Autrement dit, il n'est pas permis d'utiliser simultanément deux arcs qui s'intersectent dans $int(S)$. De tels arcs sont dits *incompatibles*.

Définition 1.2.5 Deux arcs simples y et p dans $A^\circ(S, M)$ sont dits **compatibles** si, et seulement si, il existe deux représentants y' et p' dans leur classe d'isotopie respective qui ne s'intersectent pas dans $int(S) \setminus M$. Dans le cas contraire, ils sont dits **incompatibles**.

Définition 1.2.6 Deux arcs étiquetés γ et ρ de $A^\times(S, M)$ sont dits **compatibles** si, et seulement si, ils satisfont aux trois conditions ci-dessous :

- Leurs versions (simples) non étiquetées respectives y et p sont compatibles au sens de la définition précédente ;
- Si y et p ne sont pas isotopes et partagent un même point marqué P_i ou une même ponction p_j , alors l'étiquette de γ et celle de ρ qui avoisinent P_i ou p_j , respectivement, sont identiques ;
- Si y et p sont équivalents, alors au moins un bout de γ est étiqueté de la même façon que le bout correspondant de ρ .

Sinon, γ et ρ sont dits **incompatibles**.

1.2.3 Triangulations étiquetées de (S, M)

Soit C une collection d'arcs étiquetés dans (S, M) . On suppose que tous les arcs de C sont compatibles deux à deux, c'est-à-dire toutes les paires d'arcs de C sont formées d'arcs compatibles deux-à-deux. Cette collection est dite *maximale* lorsqu'il est impossible d'ajouter un arc à C , autrement dit quand tout arc μ dans $A^\infty(S, M) \setminus C$ est incompatible avec au moins un arc dans C .

Définition 1.2.7 Une *triangulation étiquetée* T de (S, M) est une collection maximale d'arcs de $A^\infty(S, M)$ compatibles.

Cette collection maximale d'arcs découpe (S, M) en un ensemble fini de triangles qui forment une partition de (S, M) . Un triangle correspond, à homéomorphisme près, à un disque avec trois points sur sa frontière. Le nombre d'arcs n de chaque triangulation étiquetée est un invariant [FST08, Proposition 2.10], donné par la formule d'Euler

$$n = 6g + 3b + 3p + c - 6,$$

où g est le genre de S , b le nombre de composantes de bords, p le nombre de ponctions et c le nombre de points marqués sur les bords.

Exemple 1.2.2 Cas du digone à une ponction $P_{2,1}$

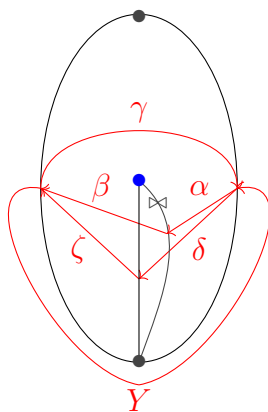


FIGURE 1.4 – Triangulation du digone à une ponction et son carquois associé Q_σ .

Dans la définition 1.2.1, le cas (b) du disque à une ponction est exclu. Ceci est due au fait que le monogone à une ponction $P_{1,1}$ n'admet qu'une seule triangulation étiquetée ce qui fait que beaucoup de définitions ne s'appliquent pas, par exemple l'opération *flip*.

1.2.4 Flip d'arcs étiquetés

L'opération *flip* est une modification locale qui s'effectue sur une configuration d'arcs d'une triangulation étiquetée T associée à (S, M) . Cette transformation engendre une nouvelle triangulation étiquetée T' liée à T comme suit. Par exemple, soit $k \in T$. Puisque l'arc $k \in T$ est adjacent à exactement deux triangles de (S, M) , donc en enlevant cet arc on obtient un quadrilatère formé par les quatre arcs restants de ces deux triangles. Si k' désigne l'autre arc du quadrilatère, alors $T' = (T \setminus \{k\}) \cup \{k'\}$ devient une nouvelle triangulation de (S, M) .

Théorème 1.2.1 [FST08] *Si $n \geq 2$, alors toute collection de $(n - 1)$ arcs de $A^\times(S, M)$ compatibles deux à deux est incluse dans exactement deux triangulations étiquetées de (S, M) .*

Ce théorème de Fomin, Shapiro et Thurston conduit à la définition qui suit.

Définition 1.2.8 *Le **flip** d'un arc γ d'une triangulation étiquetée T de (S, M) est l'opération qui consiste à remplacer γ par l'unique arc γ' non isotope à γ qui, avec les arcs restants, forme une nouvelle triangulation étiquetée T' de (S, M) , notée $f_\gamma(T)$.*

L'opération *flip*, comme la mutation, est "involutive", c'est-à-dire, $f_{\gamma'}(f_\gamma(T)) = T$. Cette opération permet de créer une combinatoire similaire à celle retrouvée dans les algèbres amassées. Il permet également d'établir un lien entre toutes les triangulations.

Définition 1.2.9 *Deux triangulations T et T' de (S, M) sont dites **flip équivalentes** s'il existe une suite finie de flips $f_{\gamma_1}, \dots, f_{\gamma_k}$, avec $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ dans T , telle que $T' = f_{\gamma_k} \dots f_{\gamma_1}(T)$.*

1.2.5 Carquois géométriques

Partant d'une triangulation σ d'un n -gone sans ponction, Caldero-Chapoton-Schiffler ont construit un carquois Q_σ associé à $(P_{n+3,0})$ et ont montré que la structure combinatoire des triangulations de $(P_{n+3,0})$ correspond à celle de l'algèbre amassée associée de type \mathbb{A}_n [CCS06]. De tels carquois sont dits *carquois géométriques*. Cette idée est suivie en 2006 par Fomin-Shapiro-Thurston dans [FST08] dans le cas général d'une surface à bords marqués avec ponctions (S, M) .

Soit T une triangulation de $(P_{n+3,0})$ dont les arcs sont numérotés au moyen de $\{1, 2, \dots, n\}$. Les sommets du carquois associé à T sont alors indexés par l'ensemble $\{1, 2, 3, \dots, n-3\}$, en d'autres termes, ils sont indexés par les diagonales dans T . Étant données deux diagonales i et j de T qui bordent un même triangle Δ , on place une flèche de i vers j si, en faisant pivoter dans $(P_{n+3,0})$ autour du point d'intersection de i et j dans le sens horaire, on passe d'abord par i puis par l'intérieur de Δ puis par j . On fait cela pour toutes les diagonales de T et on obtient ainsi un carquois Q_T ayant n sommets.

Remarque 1.2.2 *On remarquera qu'une diagonale appartenant à une triangulation T ne peut appartenir qu'à au plus deux triangles formés par T . En conséquence, pour tout sommet i de Q_T , il existe au plus deux flèches sortant ou rentrant dans i .*

Définition 1.2.10 *Un carquois Q est dit de **type géométrique** s'il existe une surface S et une triangulation T de S telle que $Q = Q_T$*

Exemple 1.2.3 *Les carquois de type Dynkin et affine \mathbb{A}_n , \mathbb{D}_n , $\tilde{\mathbb{A}}_n$, $\tilde{\mathbb{D}}_n$ sont de type géométrique [FST08].*

L'un des résultats clés de [FST08] consiste à observer que le carquois associé au flip d'un arc k d'une triangulation T est le même que le carquois obtenu par la mutation en k du carquois associé à T . De manière formelle, le résultat s'énonce comme suit :

Théorème 1.2.2 [FST08] *Soit (M, S) une surface à bords avec points marqués et T une*

triangulation de (M, S) . Alors pour toute arc k de T , le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & \mu_k(T) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q_T & \longrightarrow & Q_{f_k(T)} = \mu_k(Q_T) \end{array}$$

Plus généralement, considérons T une triangulation de (S, M) . Soit Q_T le carquois géométrique défini par T et $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$ l'ensemble des arcs étiquetés dans T , où n est donné par la formule d'Euler. On associe à la surface (S, M) une algèbre amassée $\mathcal{A}_{Q_T}(\mathfrak{X})$ définie par la graine initiale (Q_T, \underline{x}_T) , où l'ensemble d'indéterminées \underline{x}_T est donné par $\{x_{\tau_1}, x_{\tau_2}, \dots, x_{\tau_n}\}$. Une algèbre amassée est dite *provenir d'une surface* si elle admet une graine dont le carquois est de type géométrique. Puisque le carquois de type géométrique dépend du choix de T , une question naturelle se pose, à savoir *est-ce qu'une algèbre amassée provenant d'une triangulation de surface dépend de cette triangulation ?* La réponse à cette question est formulée dans le théorème suit.

Théorème 1.2.3 [*FST08*] *L'algèbre amassée $\mathcal{A}_{Q_T}(\mathfrak{X})$ associée à une triangulation T d'une surface à bords marqués avec ou sans ponction (S, M) ne dépend pas de cette triangulation, à isomorphisme près, mais plutôt de la surface (S, M)*

Ce théorème est la passerelle entre les algèbres amassées et les surfaces de bords marqués. Plus précisément, on a :

Théorème 1.2.4 [*FST08*] *Soit $\mathcal{A}_{Q_T}(\mathfrak{X})$ l'algèbre amassée associée à une surface (S, M) . Alors il existe une correspondance bijective entre*

- (1) *Les amas de $\mathcal{A}_{Q_T}(\mathfrak{X})$ et les triangulations de (S, M) ;*
- (2) *Les variables d'amas de $\mathcal{A}_{Q_T}(\mathfrak{X})$ et les classes d'isotopies d'arcs étiquetés de $A^\times(S, M)$.*

De plus, on a une correspondance entre flip d'un arc γ de $A^\times(S, M)$ et mutation de la variable amassée correspondante x_γ comme le montre le théorème 1.2.2. La variable x_γ est obtenue en tenant compte que si T est une triangulation de (S, M) définissant la graine

initiale de $\mathcal{A}_{Q_T}(\mathfrak{X})$ et γ un arc de T , alors il existe une autre triangulation T' , contenant γ , obtenue à partir de T par une suite finie de flips. La variable x_γ s'obtient alors à l'aide de la suite de mutations correspondante.

1.3 Catégories amassées

Soit Q est un carquois acyclique. Nous présentons la *catégorie amassée* introduite par Buan-Marsh-Reineke-Reiten-Todorov [BMR⁺06]. Cette catégorie a été construite à partir d'une algèbre de chemins héréditaire $H = kQ$. Le but était de trouver des concepts similaires à ceux d'amas, de variables amassées, de graines et de mutation (dans \mathcal{A}_Q) dans une catégorie ayant des propriétés additionnelles pour mieux comprendre leur combinatoire. Iyama-Yoshino [IY08] ont montré en particulier que dans une catégorie triangulée ayant les propriétés de 2-Calabi-Yau et de l'existence d'objets *inclinants amassés* T , il existe une mutation. Cette mutation est un concept essentiel à la catégorification. L'ensemble formé d'objets inclinants amassés dans ladite catégorie correspond bijectivement à l'ensemble formé des amas dans \mathcal{A}_Q [BMR⁺06] [CK06]. Le choix d'une catégorie permettant la catégorification de \mathcal{A}_Q peut se faire à partir de la catégorie des H -modules de type fini $\text{mod}H$. Soit n le nombre de sommets du carquois Q . Un H -module de la forme $T = T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_n$ est dit *inclinant* si les T_i sont des objets indécomposables, $T_i \not\cong T_j$ pour $i \neq j$, et $\text{Ext}_H^1(T, T) = 0$. Toutefois, dans $\text{mod}H$, la compatibilité des H -modules T_i avec la relation d'échange des variables amassées dans \mathcal{A}_Q n'est pas toujours satisfaite. Autrement dit, il peut arriver, pour un certain i , qu'il n'existe aucun H -module $T_i^* \not\cong T_i$ tel que $T/T_i \oplus T_i^*$ soit inclinant, où $T/T_i = \bigoplus_{j \neq i} T_j$ est un module inclinant presque complet, voir [BMR⁺06]. L'idée est donc d'agrandir la catégorie $\text{mod}H$ pour la rendre plus susceptible de trouver un certain T_i^* . Cet agrandissement se fait en pratique en considérant une catégorie beaucoup plus large que $\text{mod}H$ et le contenant, à savoir sa *catégorie dérivée bornée*, notée $\mathcal{D}^b(H)$, et ensuite prendre sa *catégorie d'orbites* sous l'action d'un groupe cyclique approprié pour diminuer la taille, d'où la *catégorie amassée*.

Nous supposons connues les notions de catégorie, catégorie additive, et foncteur. Pour plus de détails sur ces notions, nous referons le lecteur à [Ass97]

1.3.1 Catégories triangulées

Étant donné une catégorie \mathfrak{C} et un foncteur $\Sigma : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{C}$, nous appelons Σ -suite une suite de morphismes de la forme $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma(X)$. Une *catégorie suspendue* est une catégorie additive \mathfrak{C} munie d'un foncteur additive Σ associant à tout objet $X \in \mathfrak{C}$ sa *suspension* $\Sigma(X) \in \mathfrak{C}$, ainsi qu'une classe de Σ -suites appelées *triangles* soumises aux axiomes, dits de Verdier, suivants :

- (1) Toute Σ -suite isomorphe à un triangle est un triangle ;
- (2) Pour tout $X \in \mathfrak{C}$, $0 \longrightarrow X \xrightarrow{1} X \longrightarrow 0$ est un triangle ;
- (3) Si $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma(X)$ est un triangle, $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma(X) \xrightarrow{-\Sigma u} \Sigma(Y)$ en est un ;
- (4) Étant donné deux triangles $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma(X)$ et $X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} \Sigma(X')$ et deux morphismes $X \xrightarrow{a} X'$ et $Y \xrightarrow{b} Y'$ tels que $u'a = bu$, il y a un morphisme $Z \xrightarrow{c} Z'$ tel que $v'b = cv$ et $(\Sigma a)w = w'c$;
- (5) Étant donné deux morphismes $X \xrightarrow{u} X'$, $Y \xrightarrow{v} Y'$, il existe un diagramme commutatif dont les deux premières lignes et colonnes sont des triangles

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{i} & Z' & \longrightarrow & \Sigma(X) \\
 \parallel & & \downarrow v & & \downarrow & & \parallel \\
 X & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & \Sigma(X) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \Sigma(u) \\
 & & X' & \xlongequal{\quad} & X' & \xrightarrow{j} & \Sigma(Y) \\
 & & \downarrow j & & \downarrow & & \\
 & & \Sigma(Y) & \xrightarrow{\Sigma(i)} & \Sigma(Z') & &
 \end{array} \tag{1.3.1}$$

Pour plus de détails, nous referons le lecteur à [Ver96], [Nee01].

Définition 1.3.1 Une **catégorie triangulée** est par définition une catégorie suspendue où Σ est un isomorphisme.

Soit k un corps algébriquement clos et \mathfrak{C} une catégorie k -linéaire. Un foncteur k -linéaire S est dit *foncteur de Serre à droite*, respectivement à *gauche*, s'il existe des isomorphismes

$$\mathrm{Hom}_k(X, Y) \cong \mathrm{DHom}_k(Y, SX), \quad (1.3.2)$$

$$\mathrm{Hom}_k(X, Y) \cong \mathrm{DHom}_k(SY, X) \quad (1.3.3)$$

bifonctoriels pour tous X, Y de \mathfrak{C} , respectivement, où $D = \mathrm{Hom}_k(-, k)$ est le foncteur dualité des k -espaces vectoriels. La notion de foncteur de Serre à droite et celle de foncteur de Serre à gauche a été définie pour la première fois par Bondal-Kapranov [BK89]. Un *foncteur de Serre* est un foncteur de Serre à droite et à gauche. Soit $d \in \mathbb{N}$. Une catégorie triangulée est dite *d-Calabi-Yau* si d est le plus petit entier supérieur à 1 tel que Σ^d est aussi un foncteur de Serre.

Définition 1.3.2 Soit k un corps algébriquement clos et \mathcal{C} une catégorie k -linéaire triangulée munie d'un foncteur de Serre S . La **catégorie d'orbites** de \mathcal{C} par S est la catégorie quotient \mathcal{C}/S dont les objets sont les S -orbites $\tilde{X} = (S^i M)_{i \in \mathbb{Z}}$ de X , les morphismes sont donnés par la définition $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/S}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, S^i Y)$

En général, la catégorie d'orbites d'une catégorie triangulée n'est pas nécessairement triangulée.

1.3.2 Catégorie dérivée bornée

Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne. On peut associer à \mathcal{A} sa *catégorie dérivée bornée* $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$, voir [GM96]. La construction de $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$, originellement introduite par Verdier dans sa thèse [Ver96] et reprise par Grothendieck, voir [Del77], commence avec la *catégorie des complexes bornés* de \mathcal{A} , notée $\mathrm{Comp}^b(\mathcal{A})$. Un objet de $\mathrm{Comp}^b(\mathcal{A})$ est un complexe borné défini par une suite $X = (X^n, d_X^n)_{n \in \mathbb{Z}}$, formée d'objets X^n et de \mathcal{A} -morphisms

$d_X^n : X^n \longrightarrow X^{n+1}$, où X^n est nul presque partout sauf pour un nombre fini d'entiers, vérifiant la condition $d_X^{n+1}d_X^n = 0$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Un morphisme de complexes de X vers Y est une suite de morphismes $(f^n)_{n \in \mathbb{Z}}$, définie par $f^n : X^n \longrightarrow Y^n$ tels que $d_Y^n f^n = f^{n+1}d_X^n$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Ensuite, on modifie les morphismes de $\text{Comp}^b(\mathcal{A})$ en les regroupant en classes d'homotopies afin de définir la *catégorie d'homotopie des complexes*, notée $\mathcal{K}^b(\mathcal{A})$. Deux morphismes de complexes f et g de X vers Y sont dits *homotopes* s'il existe une famille de morphismes $(h^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ tels que $f^n - g^n = h^{n+1}d_X^n - d_Y^{n-1}h^n$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Les objets de $\mathcal{K}^b(\mathcal{A})$ sont les mêmes que ceux de $\text{Comp}^b(\mathcal{A})$ et ses morphismes sont les classes d'homotopie de morphismes de $\text{Comp}^b(\mathcal{A})$. La catégorie $\mathcal{K}^b(\mathcal{A})$ ainsi définie est une catégorie triangulée [GM96]. Puis, on utilise les *quasi-isomorphismes* dans $\text{Comp}^b(\mathcal{A})$ pour localiser la catégorie $\mathcal{K}^b(\mathcal{A})$ afin de définir la catégorie $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$. La localisation de $\mathcal{K}^b(\mathcal{A})$ se fait par rapport au système multiplicatif des quasi-isomorphismes. Soit X un complexe et $H^n(X) = \text{Ker}(d_X^n) / \text{Im}(d_X^{n-1})$ son n^{e} groupe de cohomologie. Un morphisme de complexes $f : X \longrightarrow Y$ est un *quasi-isomorphisme* si les morphismes $H^n(f) : H^n(X) \longrightarrow H^n(Y)$, induits en cohomologie, sont des isomorphismes, pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Enfin, on obtient la **catégorie dérivée bornée** $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ d'une catégorie abélienne \mathcal{A} , à partir de $\mathcal{K}^b(\mathcal{A})$, en ajoutant formellement les inverses des quasi-isomorphismes. Cette catégorie $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ ainsi construite a les mêmes objets que $\mathcal{K}^b(\mathcal{A})$ mais davantage de morphismes et moins d'isoclasses d'objets, car cet ajout rend isomorphes des complexes qui n'étaient pas homotopiquement équivalents. La catégorie $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ ainsi définie est aussi triangulée. Son foncteur de suspension est induit par le *foncteur de décalage* [1], défini sur les objets $X = (X^n, d_X^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ par $X[1] = (X^{n+1}, d_X^{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$ et sur les morphismes $f = (f^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ par $f[1] = (f^{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$.

En général, la structure de $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ est très difficile à décrire. En effet, un morphisme de $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ peut être représenté par une paire de morphismes $X \xleftarrow{s} L \xrightarrow{f} Y$, où s est un quasi-isomorphisme. Toutefois, si \mathcal{A} est *héréditaire*, $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ devient plus facile à comprendre. Dans ce cas, chaque objet indécomposable X de $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ est isomorphe [Hap88] à un complexe *concentré en degré i* , noté $X[i] = \dots \rightarrow 0 \rightarrow X^i \rightarrow 0 \rightarrow \dots$, où X^i est un

\mathcal{A} -module indécomposable avec $X^n = 0$, pour $n \neq i$, et $d_X^n = 0$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Donc les objets de $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ sont donnés par les complexes concentrés $X[i]$ et les morphismes par l'isomorphisme $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathcal{A})}(X[i], Y[i]) \cong \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{j-i}(X, Y)$, pour tout $X, Y \in \mathcal{A}$ et $i, j \in \mathbb{Z}$. De plus, si \mathcal{A} est de dimension finie et admet des suites presque scindées, alors ces suites presque scindées induisent dans $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ des triangles presque scindés. Dans ce cas, un objet indécomposable de type fini M de \mathcal{A} s'identifie au complexe concentré en degré zéro $M[0] = \dots \rightarrow 0 \rightarrow M^0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$, avec $M^0 = M$.

Soit maintenant Q un carquois fini, connexe et acyclique et $\mathcal{A} = \mathrm{mod} H$, où $H = kQ$. L'algèbre de chemin H est alors de dimension finie. La catégorie dérivée $\mathcal{D}^b(H)$ est munie d'un *foncteur de translation d'Auslander-Reiten* $\tau_{\mathcal{D}}$ et le foncteur de décalage $[1]_{\mathcal{D}}$ est un automorphisme. La composition $F = \tau_{\mathcal{D}}^{-1}[1]_{\mathcal{D}}$ est donc un foncteur de Serre dans $\mathcal{D}^b(H)$. Par conséquent, on peut définir la catégorie d'orbites de $\mathcal{D}^b(H)$ par F comme suit.

Définition 1.3.3 Soit $F = \tau_{\mathcal{D}}^{-1}[1]_{\mathcal{D}}$ et $H = kQ$ une algèbre héréditaire de dimension finie. La **catégorie amassée** associée au carquois acyclique Q , notée \mathcal{C}_Q est la catégorie d'orbites $\mathcal{D}^b(H)/F$ du foncteur F dans $\mathcal{D}^b(H)$.

La définition de $\mathcal{D}^b(H)$ induit la projection canonique $\pi : \mathcal{D}^b(H) \longrightarrow \mathcal{C}_Q$ qui associe tout objet M de $\mathcal{D}^b(H)$ son orbite \widetilde{M} sous l'action de $F = \tau_{\mathcal{D}}^{-1}[1]_{\mathcal{D}}$.

Remarque 1.3.1 La catégorie dérivée $\mathcal{D}^b(H)$ admet une dualité de Serre, c'est-à-dire, $\mathrm{Hom}(M, N[1]) \cong \mathrm{DHom}(N, \tau M)$

Remarque 1.3.2 La catégorie dérivée $\mathcal{D}^b(H)$ est triangulée, Hom-finie (les espaces de morphismes sont de dimension finie sur k) et de Krull-Schmidt, c'est-à-dire une catégorie k -linéaire dans laquelle tout objet X se décompose de façon unique en une somme directe finie d'objets indécomposables, à isomorphisme près. Il en est de même pour \mathcal{C}_Q . Ce premier résultat est de Keller et est énoncé en toute généralité dans [Kel05]. Le second est de Buan, Marsh, Reineke, Reiten, et Todorov dans [BMR⁺06]. De plus, si Q est de type Dynkin, alors \mathcal{C}_Q est additivement finie [Hap87], c'est-à-dire, possède un nombre fini de

classes d'isomorphismes de modules indécomposables. De manière formelle ces résultats sont énoncés comme suit.

Théorème 1.3.1 [*Kel05*] *La catégorie amassée \mathcal{C}_Q , associée à un carquois fini, connexe et acyclique, possède une structure triangulée telle que le foncteur de projection $\pi : \mathcal{D}^b(H) \longrightarrow \mathcal{C}_Q$ est triangulé.*

Soit $\text{ind}(H)$ un ensemble d'isoclasses des H -modules indécomposables.

Théorème 1.3.2 [*BMR⁺06*] *Soit Q un bon carquois acyclique et P_i le H -module indécomposable projectif correspondant au sommet i . La catégorie amassée \mathcal{C}_Q est Hom-finie, de Krull Schmidt et l'ensemble des objets de \mathcal{C}_Q donné par $\text{ind}(\mathcal{C}_Q) = \{\widetilde{M} \mid M \in \text{ind}(H)\} \cup \{\widetilde{P}_i[1], i \in Q_0\}$*

Remarque 1.3.3 1. Les foncteurs de décalage et de translation dans $\mathcal{C} = \mathcal{C}_Q, [1]_{\mathcal{C}}$ et $\tau_{\mathcal{C}}$ sont induits par ceux dans $\mathcal{D}^b(H)$. Donc, on a $\tau_{\mathcal{C}}\widetilde{M} = \widetilde{\tau_{\mathcal{D}}M}$ et $\widetilde{M[1]_{\mathcal{D}}} = \widetilde{M}[1]_{\mathcal{C}}$.

2. $[1]_{\mathcal{C}} = \tau_{\mathcal{C}}$. En effet, $\tau_{\mathcal{C}}\widetilde{M} = \widetilde{\tau_{\mathcal{D}}M} = \widetilde{\tau_{\mathcal{D}}FM} = \widetilde{M[1]_{\mathcal{D}}} = \widetilde{M}[1]_{\mathcal{C}}$

3. \mathcal{C}_Q admet une dualité de Serre : $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\widetilde{M}, \widetilde{N}) \cong \text{DHom}_{\mathcal{C}}(\widetilde{N}, \tau\widetilde{M})$. En effet, $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\widetilde{M}, \widetilde{N}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\widetilde{M}, \widetilde{N}[1]) = \oplus \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\widetilde{M}, F^i\widetilde{N}[1])$ et $\text{DHom}_{\mathcal{C}}(\widetilde{N}, \tau\widetilde{M}) = \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F^i\widetilde{N}, \tau\widetilde{M})$. Le résultat suit de la dualité de Serre dans \mathcal{D}

4. \mathcal{C}_Q est 2-Calabi Yau : $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\widetilde{M}, \widetilde{N}) \cong \text{DExt}_{\mathcal{C}}^1(\widetilde{N}, \widetilde{M})$.

1.4 Théorie d'Auslander-Reiten

La théorie d'Auslander-Reiten admet comme outils principaux les *morphismes irréductibles* et les *suites presque scindées*. Ces notions ont été introduites par Auslander dans [*Aus74*] et Auslander-Reiten dans [*AR75*], [*AR77*]. Le but était de faire l'étude de la théorie des représentations des algèbres artiniennes. Une notion importante de cette théorie est celle dite *carquois d'Auslander-Reiten*. Ce carquois est un invariant important. Il permet, en général, de classer les catégories vérifiant des conditions de finitude, mais

aussi de décrire leurs objets indécomposables et les morphismes entre eux. Sa construction repose essentiellement sur les morphismes irréductibles et les suites presque scindées.

Dans cette section, nous présentons une brève description de ce carquois et nous nous intéressons au carquois d'Auslander-Reiten de la catégorie d'orbite de $\mathcal{D}^b(H)$. Pour plus de détails, nous référons le lecteur à [ASS06] pour ce qui est de la description du carquois de $\text{mod}H$ et à [Hap88] pour celui de $\mathcal{D}^b(H)$.

1.4.1 Suites d'Auslander-Reiten

Soit \mathcal{A} une catégorie k -linéaire abélienne. Un objet X de \mathcal{A} est dit *fortement indécomposable* si son algèbre d'endomorphisme $\text{End}_{\mathcal{A}}(X)$ est une algèbre locale. Dans ce cas, $\text{End}_{\mathcal{A}}(X)$ admet comme seuls idempotents les morphismes nul 0 et identité 1_X . Par conséquent X est indécomposable.

Définition 1.4.1 [AR77], [ARS95] Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de \mathcal{A} . Le morphisme f est dit **irréductible** s'il n'est ni une section ni une rétraction et tel que, si $f = gh$, alors h est une section ou g une rétraction. De même, f est dit **morphisme presque scindé à gauche** si

- (1) f n'est pas une section, c'est-à-dire, n'admet pas un inverse à droite ;
- (2) Si $h : X \longrightarrow Z$ n'est pas une section, alors h se factorise par f

En outre, si lorsque $h : Y \longrightarrow Y$ est tel que $hf = f$ implique h un isomorphisme, alors f est dit **minimal presque scindé à gauche**. De manière analogue, en inversant les flèches, on obtient les notions de morphisme presque scindé à droite et de morphisme minimal presque scindé à droite.

Définition 1.4.2 [AR75, ARS95] Une suite exacte courte $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ dans \mathcal{A} est dite **suite presque scindée** si f est presque scindé à gauche et X et Z sont fortement indécomposables.

Dans la définition 1.4.2, la condition f presque scindé à gauche équivaut à g presque scindé à droite [ARS95, Proposition]. De plus, puisque X et Z sont fortement indécomposables, alors f et g sont minimales presque scindés à gauche et à droite respectivement.

La théorie des suites presque scindées dans une catégorie abélienne permet d'obtenir une description de la catégorie des modules de type fini $\text{mod}A$ lorsque A est de dimension finie. Dans ce cas, pour tout A -module indécomposable X , si X est non injectif, alors $\text{mod}A$ admet une suite presque scindée $0 \longrightarrow X \longrightarrow E \longrightarrow Y \longrightarrow 0$ avec $Y = \tau^{-1}(X)$ non projectif et, si X est injectif, alors la projection canonique $X \longrightarrow X/\text{soc}(X)$ est minimale presque scindée à gauche. De manière duale, si X est non projectif, alors $\text{mod}A$ admet une suite presque scindée $0 \longrightarrow Z \longrightarrow E' \longrightarrow X \longrightarrow 0$ avec $Z = \tau(X)$ non injectif et, si X est projectif, alors l'inclusion canonique $\text{rad}(X) \longrightarrow X$ est minimale presque scindée à droite, voir [ARS95, Théorème].

Cependant, lorsque la catégorie étudiée est non abélienne, certaines notions peuvent ne plus exister, c'est le cas des notions de noyau et conoyau. Des exemples de cette situation sont les catégories dérivées $\mathcal{D}^b(H)$ et les catégories d'orbites $\mathcal{D}^b(H)/S$. Ce manque de structure est parfois compensé en munissant ladite catégorie d'une structure de catégorie triangulée. L'idée sous-jacente est que dans une telle catégorie, les triangles jouent un rôle analogue aux suites exactes. Dans ce qui suit, nous nous intéressons aux triangles, dites *triangles d'Auslander-Reiten*, dans une catégorie triangulée de *Krull-Schmidt*. Ceux-ci correspondent aux suites presque scindées dans une catégorie abélienne.

1.4.2 Triangles d'Auslander-Reiten

Soit $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ une suite courte dans une catégorie de Krull-Schmidt \mathcal{C} . f est dit *pseudo-noyau* de g si la suite $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, X) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, Y) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, Z)$ est exacte pour tout objet M de \mathcal{C} . De même, g est dit *pseudo-conoyau* de f si la suite $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, M) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, M) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, M)$ est exacte pour tout objet M de \mathcal{C} . La suite courte $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ est dite *pseudo-exacte* si f est pseudo-noyau et g pseudo-conoyau.

Définition 1.4.3 Une suite courte pseudo-exacte $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ dans \mathcal{C} , avec $Y \neq 0$ est dite **suite d'Auslander-Reiten** si f est un morphisme minimal presque scindé à gauche et g minimal presque scindé à droite.

Un résultat analogue de l'unicité des suites presque scindées dans une catégorie abélienne est formulé dans le théorème qui suit. Celui-ci affirme que de la même façon que dans une catégorie abélienne les morphismes irréductibles dans une catégorie de Krull-Schmidt sont des décompositions de morphismes minimaux presque scindés à gauche ou à droite.

Théorème 1.4.1 Soit $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ une suite d'Auslander-Reiten de \mathcal{C} .

- i) $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ est, à isomorphisme près, l'unique suite d'Auslander-Reiten de \mathcal{C} commençant par X ou se terminant par Z ;
- ii) Chaque morphisme irréductible $f_1 : X \rightarrow Y_1$, où $g_1 : Y_1 \rightarrow Z$ s'inscrit dans une suite d'Auslander-Reiten $X \xrightarrow{f} Y_1 \oplus Y_2 \xrightarrow{g} Z$, où $f = (f_1, f_2)$ et $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$

Il faut noter que les notions de suites d'Auslander-Reiten et de suites presque scindées coïncident lorsque la catégorie \mathcal{C} est abélienne. Dans ce cas, une suite de morphismes $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ dans \mathcal{C} est dite suite d'Auslander-Reiten si, et seulement si, la suite exacte courte $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ est presque scindée.

Supposons maintenant \mathcal{C} une catégorie triangulée de Krull-Schmidt et considérons un triangle exact $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$ dans \mathcal{C} . Il est important de noter que $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ est une suite pseudo-exacte, voir [Hap88, section 1.2.]. De plus, f est minimal presque scindé à gauche si, et seulement si, g est minimal presque scindé à droite, voir [Hap88, section 4.5.], et dans ce cas, le triangle exact $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$ est dit *triangle d'Auslander-Reiten*, voir [Hap88, section 4.1.]. Le lien entre suite d'Auslander-Reiten et triangle d'Auslander-Reiten est formulé dans ce lemme.

Lemme 1.4.1 [Liu10, Lemme 6.1.] Une suite de morphismes $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ dans \mathcal{C} avec $Y \neq 0$ est une suite d'Auslander-Reiten si, et seulement si, elle peut être plongée dans un triangle d'Auslander-Reiten $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$

1.4.3 Carquois d'Auslander-Reiten

Soit \mathcal{C} une catégorie abélienne, k -linéaire Hom-finie. En particulier, \mathcal{C} est de Krull-Schmidt. Soit X et Y deux objets de \mathcal{C} et notons $\text{rad}_{\mathcal{C}}$ le *radical* de \mathcal{C} défini par

$$\text{rad}_{\mathcal{C}} = \{\text{rad}_{\mathcal{C}}(X, Y) \mid X, Y \text{ indécomposables}\},$$

où $\text{rad}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ est le k -espace vectoriel formé des non-isomorphismes de X vers Y dans \mathcal{C} . Notons $\text{Irr}(X, Y)$ l'espace des morphismes irréductibles dans \mathcal{C} défini par le quotient $\text{rad}_{\mathcal{C}}(X, Y)/\text{rad}_{\mathcal{C}}^2(X, Y)$. Un élément u de $\text{rad}_{\mathcal{C}}^2(X, Y)$ se décompose en vw , où w et v sont dans $\text{rad}_{\mathcal{C}}$. Ainsi, si $\bar{u} \in \text{Irr}(X, Y)$ est non nul, alors u est un morphisme irréductible de X vers Y . Pour tout objet indécomposable Z , on note $k_Z = \text{End}_{\mathcal{C}}(Z)/\text{rad}(\text{End}_{\mathcal{C}}(Z))$ son corps résiduel. Le k -espace vectoriel $\text{Irr}(X, Y)$ admet une structure de $(k_Y - k_X)$ -bimodule. Soit d_{XY} et d'_{XY} sa dimension en tant que k_Y -module et k_X -module, respectivement.

Le carquois d'Auslander-Reiten de \mathcal{C} , noté $(\Gamma_{\mathcal{C}}, \tau)$, est obtenu comme suit :

- *sommets* : formés par un ensemble complet de représentants de classes d'isomorphisme des objets indécomposables de \mathcal{C} ;
- *flèches* : étant donné deux objets indécomposables X et Y de \mathcal{C} , il y a une flèche de $\alpha : X \longrightarrow Y$ si, et seulement si, $\text{Irr}(X, Y) \neq 0$. À α on associe le couple d'entiers (d_{XY}, d'_{XY}) , appelé *valuation* de α .

La translation τ , appelée *translation d'Auslander-Reiten*, est telle que $X = \tau Z$ si, et seulement si, $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$ est une suite d'Auslander-Reiten de \mathcal{C} .

Proposition 1.4.1 [*Liu10, Proposition 2.1.*] Soit \mathcal{C} une catégorie additive k -linéaire. Si \mathcal{C} est de Krull-Schmidt, alors le carquois d'Auslander-Reiten $(\Gamma_{\mathcal{C}}, \tau)$ est un carquois à translation valué.

Le théorème de Happel qui suit présente une description complète du carquois d'Auslander-Reiten de $\mathcal{D}^b(\text{mod } kQ)$, où Q est un carquois de Dynkin.

Théorème 1.4.2 [*Hap87*] Le carquois d'Auslander-Reiten de la catégorie dérivée $\mathcal{D}^b(\text{mod } kQ)$ est donné par le carquois de répétition $\mathbb{Z}Q$ muni de la translation canonique.

Exemple 1.4.1 *Considérons le carquois Q suivant $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$. Le théorème de Happel affirme que le carquois d'Auslander-Reiten de la catégorie $\mathcal{D}^b(\text{mod } kQ)$ est de la forme qui suit :*

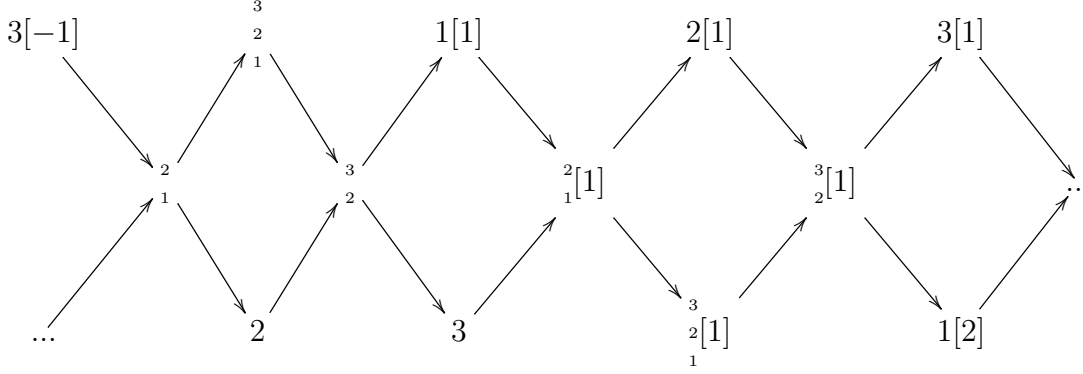


FIGURE 1.5 – Carquois de la catégorie dérivée $\mathcal{D}^b(\text{mod } kQ)$

Utilisant ce théorème, Buan-Marsh-Reineke-Reiten-Todorov ont déterminé dans [BMR⁺06] le carquois d'Auslander-Reiten de la catégorie d'orbites $\mathcal{D}^b(\text{mod } kQ)/S$, où Q est un carquois de Dynkin. Nous terminons ce chapitre en énonçant leur théorème principal donnant la forme explicite du carquois d'Auslander-Reiten de la catégorie d'orbites.

Théorème 1.4.3 [BMR⁺06] *Soit S une auto-équivalence d'ordre infini de la catégorie dérivée $\mathcal{D}^b(H)$. Le carquois d'Auslander-Reiten de la catégorie d'orbites $\mathcal{D}^b(H)/S$ est de la forme $\mathbb{Z}Q/\varphi$, où φ est l'automorphisme de carquois à translation de $\mathbb{Z}Q$ correspondant à l'auto-équivalence S .*

La construction de la catégorie amassée se fait à partir de celle de $\mathcal{D}^b(\text{mod } kQ)$ en identifiant les objets de $\mathcal{D}^b(\text{mod } kQ)$ appartenant à une même F-orbite, $F = \tau^{-1}[1]$. Par exemple, dans la figure 1.4.1, les objets 1 et 2[1] appartiennent à la même F-orbite de même que les objets $\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}$ et $\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}[1]$ et les objets $\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}$ et 1[2]. En effet, on a $F(1) = \tau^{-1}1[1] = 2[1]$, $F(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}) = \tau^{-1}\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}[1] = \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}[1]$, $F(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}) = \tau^{-1}\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}[1] = 1[2]$. D'où on obtient le carquois $\Gamma_{\mathcal{C}}$ qui suit. Dans ce carquois les lignes verticales gauche et droite sont identiques. Par conséquent $\Gamma_{\mathcal{C}}$ est un “ruban de Möbius”.

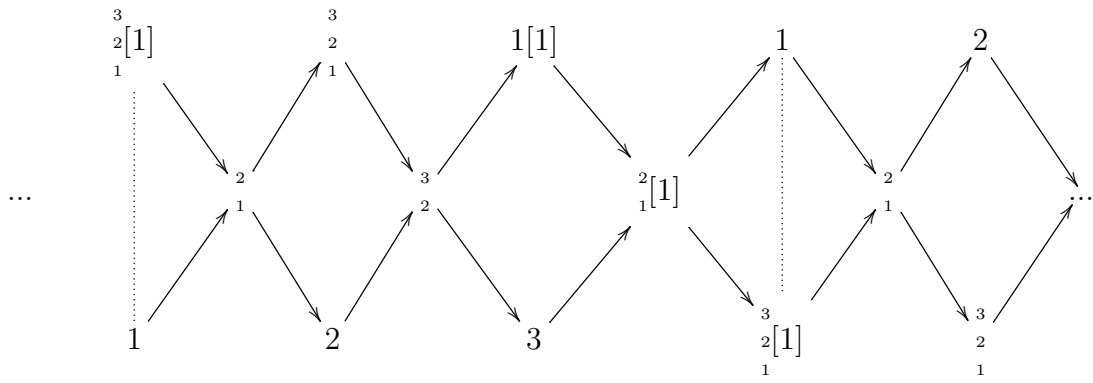


FIGURE 1.6 – Carquois de la catégorie amassée $\mathcal{C}_{\mathbf{A}_3}$

Chapitre 2

Modules de Cohen-Macaulay sur des Singularités d'hypersurface

Les *modules de Cohen-Macaulay* sur des anneaux commutatifs noethériens locaux jouent un rôle important en théorie des représentations. En effet, leur étude sur une *singularité isolée* est l'une des quatre catégories triangulées principales utilisée en théorie des représentations. Le choix d'un tel cadre de travail a été motivé par Herzog qui montre que l'anneau des invariants $\mathbf{C}[[x, y]]^G$ est une singularité de type CM-représentation fini [Her78], c'est-à-dire admet un nombre fini d'isoclasses de modules de Cohen-Macaulay indécomposables. Dans cette thèse, on s'intéresse à leur étude sur une singularité isolée *simple* 1-Gorenstein. Dans la section 1, nous proposons au lemme 2.1.1 une caractérisation de ces modules sur une algèbre A de dimension infinie 1-Gorenstein puis nous montrons au théorème 2.1.3 une équivalence entre la catégorie $\mathrm{CM}(A * G)$ des modules de Cohen-Macaulay sur l'*algèbre de groupe gauche* d'un groupe cyclique d'ordre fini G sur A , notée $A * G$, et la *catégorie de groupe gauche* de la catégorie $\mathrm{CM}(A)$ par G , notée $\mathrm{CM}(A) * G$. Ensuite, nous donnons au lemme 2.1.2 quelques propriétés auxquelles on s'intéressera, plus tard au chapitre 4, que partage une catégorie et sa catégorie de groupe gauche. On note que la plupart des résultats de base présentés dans cette section sont énoncés dans un contexte plus général, mais nous les formulons ici dans un cadre restreint. Dans la

section 2, nous présentons les surfaces de singularités qui ont un nombre fini de modules de Cohen-Macaulay sans toutefois faire leur étude. Pour plus de détails, nous referons le lecteur à [DRt67], [GT87], [BGS87], [Yos90] ou [Jac67], [AV85], [Esn85], [Aus86a].

Tout au long de ce chapitre, sauf mention contraire, (R, \mathfrak{m}) désigne un anneau commutatif noethérien local, $k = R/\mathfrak{m}$ son corps résiduel et $d = \text{krdim}(R)$ sa *dimension de Krull*. On note $\text{mod}R$ la catégorie des R -modules de type fini, dits modules noethériens.

2.1 Modules de Cohen-Macaulay

La *profondeur* d'un R -module M non nul de type fini, noté $\text{depth}(M_R)$ est un invariant homologique très important, il est lié à la dimension projective de M via la formule d'Auslander–Buchsbaum [AB57, Théorème 3.7]. C'est le supremum des longueurs de toutes les *suites M -régulières* $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathfrak{m}$. Ce nombre se calcule homologiquement comme suit

$$\text{depth}(M_R) = \inf_{i \geq 0} \{i \mid \text{Ext}_R^i(k, M) \neq 0\}.$$

Par définition, $\text{depth}(0_R) = \inf \emptyset = +\infty$. Pour un R -module $0 \neq M$ de type fini on a toujours l'inégalité $\text{depth}(M_R) \leq d$.

Théorème 2.1.1 (Formule d'Auslander–Buchsbaum) *Soit M un R -module de type fini de dimension projective finie. Alors on a l'égalité*

$$\text{dp}M + \text{depth}(M_R) = \text{depth}(R)$$

La notion de profondeur d'un module permet de définir une classe de modules ayant des propriétés importantes, à savoir les *modules de Cohen-Macaulay*.

Définition 2.1.1 *Un R -module de type fini M est dit module **maximal de Cohen-Macaulay** ou simplement de **Cohen-Macaulay** si $\text{depth}(M) = \text{krdim}(R)$. L'anneau R est dit de Cohen-Macaulay s'il l'est en tant que R -module.*

Le concept de CM-module apparaît naturellement dans le contexte de l'algèbre commutative. Par exemple, si l'anneau (R, \mathfrak{m}) est de dimension de Krull 1 et *réduit*, c'est-à-dire, n'admet pas d'idéal nilpotent autre que zéro, alors un R -module M est dit de Cohen-Macaulay si, et seulement si, M est *sans torsion* [BD08, Lemme 2.5]. De même, la formule d'Auslander–Buchsbaum 2.1.1 implique que la structure des modules de Cohen-Macaulay sur un anneau *régulier* local coïncide avec celle des modules libres.

On rappelle qu'un anneau (R, \mathfrak{m}) est dit **régulier** s'il a la propriété que le nombre minimal de générateurs de \mathfrak{m} est égal à sa dimension de Krull d . Par exemple, l'anneau des séries formelles $k[[x_1, x_2, \dots, x_d]]$ en les variables x_i , pour $1 \leq i \leq d$, est régulier d'idéal maximal $\langle x_1, x_2, \dots, x_d \rangle$ et de dimension de Krull d .

Définition 2.1.2 [Iwa79], [Iwa80] *Un anneau noethérien commutatif est dit **Gorenstein** si sa dimension injective est finie. Un anneau commutatif est dit n -Gorenstein si sa dimension injective est au plus égale à n . Une k -algèbre commutative est dite Gorenstein si elle est Gorenstein en tant que anneau.*

Exemple 2.1.1 *Soit (R, \mathfrak{m}) noethérien et local. On a :*

- *Si (R, \mathfrak{m}) est régulier, alors il est Gorenstein.*
- *Si (R, \mathfrak{m}) est régulier et $f \in \mathfrak{m}$, alors l'anneau quotient R/f est Gorenstein [BH93, Proposition 3.1.19]*
- *Soit k un corps algébriquement clos et $G \subseteq GL_n(k)$ un sous-groupe fini sans pseudo-réflexion, alors l'anneau invariant $k[[x_1, x_2, \dots, x_n]]^G$ est de Gorenstein [Wat74].*

Plusieurs définitions de modules de Cohen-Macaulay existent dans la littérature, mais la plupart d'entre elles sont équivalentes ou ne diffèrent que selon le contexte étudié, voir Grothendieck [Har67], Herzog-Kunz [HK67]. La définition 2.1.3 adaptée qui suit, originellement donnée par Buchweitz, est celle qu'on utilisera le plus souvent, car notre cadre de travail sera, plus tard au chapitre 4, celui d'un anneau *complet hensélien* 1-Gorenstein de *singularité isolée simple*.

Définition 2.1.3 [[Buc87](#), 4.2.1] Soit (R, \mathfrak{m}) 1-Gorenstein. Un R -module de type fini est dit **module de Cohen-Macaulay** si, et seulement si,

$$\mathrm{Ext}_A^i(M, R) = 0, \text{ pour tout } i \neq 0.$$

Notons $\mathrm{CM}(R)$ la catégorie des R -modules de Cohen-Macaulay.

Proposition 2.1.1 Si la suite courte de R -modules $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ est exacte dans $\mathrm{CM}(R)$, alors

- (1) L et N dans $\mathrm{CM}(R)$ entraînent M dans $\mathrm{CM}(R)$,
- (2) M et N dans $\mathrm{CM}(R)$, impliquent L dans $\mathrm{CM}(R)$,
- (3) L et M dans $\mathrm{CM}(R)$ entraînent N dans $\mathrm{CM}(R)$ si, et seulement si, le morphisme $\mathrm{Hom}_R(f, R)$ est surjectif.

Définition 2.1.4 Soit l'anneau (R, \mathfrak{m}) de Cohen-Macaulay. Un R -module de Cohen-Macaulay K est dit **module canonique** si $\mathrm{Ext}_R^d(k, K) \cong k$ et $di(K) < \infty$.

Les théorèmes qui suivent résument quelques propriétés importantes sur K .

Théorème 2.1.2 [[Buc87](#), Théorème 4.1.1.] Soit l'anneau (R, \mathfrak{m}) de dimension de Krull finie. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) La dimension injective de R est finie ;
- (b) Pour tout idéal premier \mathfrak{p} de R , l'anneau localisé $R_{\mathfrak{p}}$ est Gorenstein.
- (c) R admet un module canonique qui est projectif.

De plus, sous ces conditions, la dimension injective de R coïncide avec sa dimension de Krull.

Théorème 2.1.3 [[BH98](#), Section 3.3] Soit l'anneau (R, \mathfrak{m}) de Cohen-Macaulay.

- i) Si K et K' sont deux modules canoniques de Cohen-Macaulay, alors $K \cong K'$. On note $K = K_R$.

- ii) Un module canonique existe dans $\text{CM}(R)$ si, et seulement si, il existe un anneau Gorenstein régulier (T, \mathfrak{n}) et un homomorphisme d'anneaux surjectif $T \twoheadrightarrow R$. Dans ce cas, on a l'isomorphisme $K_R \cong \text{Ext}_T^i(R, T)$, où $i = \text{krdim}(T) - \text{krdim}(R)$.
- iii) Si R est Gorenstein, alors le module régulier R est canonique.

Les CM-modules sur l'anneau (R, \mathfrak{m}) ont des propriétés homologiques importantes. Les premiers résultats fondamentaux de leur étude, dûs à Auslander, montrent, par exemple, l'existence de suites presque scindées, la dualité de Serre dans la *catégorie stable* [Aus78] [Aus87]. Ces études ont été motivées par les travaux de Buchweitz, qui a suggéré d'étudier la catégorie stable des CM-modules sur un anneau local commutatif Gorenstein en tant que catégorie triangulée [Buc87], voir aussi [Orl04].

La catégorie stable $\underline{\text{CM}}(R)$ a les mêmes objets que $\text{CM}(R)$ et l'espace des morphismes de l'objet X vers l'objet Y est défini par le quotient $\text{Hom}_R(X, Y)/[R](X, Y)$, où $[R](X, Y)$ est l'ensemble des morphismes de X vers Y se factorisant par un projectif.

Voici quelques propriétés intéressantes dans la catégorie $\text{CM}(R)$.

Théorème 2.1.4 [BH98, Section 3.3] Soit l'anneau (R, \mathfrak{m}) de Cohen-Macaulay et ayant un module canonique K . Alors,

- i) pour tout $M \in \text{CM}(R)$ et $i > 0$, on a $\text{Ext}_R^i(M, K) = 0$. En particulier, K est un objet injectif dans $\underline{\text{CM}}(R)$.
- ii) pour tout $M \in \text{CM}(R)$, le module dual $M^\star = \text{Hom}_R(M, K)$ est aussi de Cohen-Macaulay. En outre, on a l'isomorphisme $M \twoheadrightarrow M^{\star\star}$.

Proposition 2.1.2 Soit l'anneau (R, \mathfrak{m}) 1-Gorenstein.

- (1) $\text{CM}(R)$ est une catégorie de Frobenius et $\underline{\text{CM}}(R)$ est une catégorie triangulée 2-Calabi-Yau [Hap88, Théorème 2.6].
- (2) Il y a une équivalence triangulée $\underline{\text{CM}}(R) \simeq \mathcal{D}^b(R)/\text{per}R$. [Buc87, Théorème 4.4.1], [KV87], [Ric89].

Définition 2.1.5 Soit M un R -module et (π) une résolution libre (minimale) de M ,

$$(\pi) : \cdots \longrightarrow L_2 \xrightarrow{\varphi_2} L_1 \xrightarrow{\varphi_1} L \longrightarrow M \longrightarrow 0 ,$$

où chaque L_i , pour tout $i \in \mathbb{N}$, est un R -module libre et chaque R -morphisme φ_i est une surjection dans le noyau du morphisme φ_{i-1} . L'image M_n de φ_n , notée $\text{syz}^n(M)$, est appelée n -ième module syzygy de M .

Proposition 2.1.3 Soit l'anneau (R, \mathfrak{m}) 1-Gorenstein et M un R -module de type fini. Alors $\text{syz}^1(M)$ est de Cohen-Macaulay.

Lemme 2.1.1 Soit A une k -algèbre 1-Gorenstein et M un A -module de type fini. Alors M est de Cohen-Macaulay si, et seulement si, il est un sous-module d'un A -module projectif.

Démonstration 2.1.1 Soit P un A -module projectif et M un sous A -module de P . Alors cette inclusion induit la suite exacte $0 \longrightarrow \text{Ext}_A^1(M, A) \longrightarrow \text{Ext}_A^2(P/M, A) \longrightarrow 0$. Mais comme A est 1-Gorenstein, on a que $\text{Ext}_A^2(P/M, A) = 0$. D'où la suffisance de la condition. Inversement, soit $(\pi) : P_1 \xrightarrow{u} P_0 \xrightarrow{v} M \longrightarrow 0$ une présentation projective de M . Considérons le morphisme d'évaluation $\sigma_M : M \longrightarrow M^{**}$ défini par $m \mapsto (f \mapsto f(m))$. Puisque A est noethérien, alors il en est de même pour $M^* = \text{Hom}_A(M, A)$. Soit alors r le nombre de générateur de $M^* = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$. Posons $f : M \longrightarrow A^r$ défini par $m \mapsto (f_1(m), \dots, f_r(m))$. Alors $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(\sigma_M)$. Le résultat suit alors du théorèmes 2.1.3, iii) combiné au théorème 2.1.4, ii). En effet, on affirme que si $M \in \text{CM}(A)$, alors $\text{Ker}(\sigma_M) = 0$. La présentation projective (π) donne les deux suites courtes exactes suivantes :

$$(\pi)_0 : 0 \longrightarrow \text{Ker}(v) \xrightarrow{r} P_0 \xrightarrow{v} M \longrightarrow 0$$

et

$$(\pi)_1 : 0 \longrightarrow \text{Ker}(u) \xrightarrow{t} P_1 \xrightarrow{s} \text{Ker}(v) \longrightarrow 0$$

telles que $sr = u$, avec $\text{Ker}(v) \in \text{CM}(A)$. Celles-ci induisent les suites exactes :

$$\begin{aligned} (\pi)^*_0 : 0 \longrightarrow M^* \xrightarrow{v^*} P^*_0 \xrightarrow{r^*} \text{Ker}(v)^* \longrightarrow \text{Ext}_A^1(M, A) \longrightarrow 0, \\ (\pi)^*_1 : 0 \longrightarrow \text{Ker}(v)^* \xrightarrow{s^*} P^*_1 \xrightarrow{t^*} \text{Ker}(u)^* \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

On a $\text{Coker} r^* = \text{Ext}_A^1(M, A)$. D'autre part, en appliquant le foncteur $\text{Hom}_A(-, A)$ à (π) , on obtient la suite exacte : $(\pi)^* : 0 \longrightarrow M^* \xrightarrow{v^*} P^*_0 \xrightarrow{u^*} P^*_1 \longrightarrow \text{Coker} u^* \longrightarrow 0$ telle que $u^* = r^* s^*$. Ainsi, on a $\text{Coker} u^* = \text{Coker} r^* = \text{Ext}_A^1(M, A)$. Donc si M est Cohen-Macaulay, alors $\text{Coker} u^* = 0$ et la suite exacte $(\pi)^*$ devient

$$0 \longrightarrow M^* \xrightarrow{v^*} P^*_0 \xrightarrow{u^*} P^*_1 \longrightarrow 0.$$

Mais, puisque $\text{Hom}_{A^{\text{op}}}(P^*, -) \cong P \otimes_A \text{Hom}_{A^{\text{op}}}(A, -)$, alors P^* est projectif et σ_{P_i} un isomorphisme, pour tout $i = 0, 1$. Le résultat suit alors du lemme du serpent appliqué au diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \sigma_{P_1} & & \downarrow \sigma_{P_0} & & \downarrow \sigma_M & & \\ 0 & \longrightarrow & P_1^{**} & \longrightarrow & P_0^{**} & \longrightarrow & M^{**} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Ce lemme donne une caractérisation des CM-modules sur une algèbre 1-Gorenstein de dimension peut-être infinie. Ce résultat élémentaire sera utiliser au chapitre 4 pour calculer explicitement les CM-modules sur notre *algèbre jacobienne à bords gelés* de dimension infinie. De plus, il permet d'énoncer le théorème principal de ce chapitre. Ce résultat, formulé au théorème 2.1.6, fait appel aux notions d'actions de groupes.

Soient $n \in \mathbb{N}$, A une k -algèbre et G un groupe cyclique d'ordre n et d'élément identité e_G . Pour ces notions auxquelles on s'intéresse dans la suite, nous referons le lecteur à [CM84] [RR85] [Pas86], [Aus86b] [AR87], [Boi92], [Yi94], [Mar99], [SW12].

Définition 2.1.6 *Le groupe G agit sur l'algèbre A s'il existe une fonction $G \times A \longrightarrow A$, $(g, a) \longmapsto g(a)$ telle que :*

- (1) *Pour tout $g \in G$, l'application $a \longmapsto g(a)$ est un automorphisme k -linéaire de A .*

(2) $g_1 g_2(a) = g_1(g_2(a))$, pour tout $g_1, g_2 \in G$ et $a \in A$.

(3) $1(a) = a$, pour tout $a \in A$.

Tout d'abord, une telle action de G sur l'algèbre A définit une k -algèbre dite *algèbre de groupe gauche* de G sur A .

Définition 2.1.7 [[Aus86b](#)] *L'algèbre de groupe gauche de G sur A , notée $A * G$, est la k -algèbre définie comme étant le A -module libre à gauche ayant pour base tous les éléments de G*

$$A * G = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i g_i \mid a_i \in A, g_i \in G \right\} = \bigoplus_g A g,$$

muni de la multiplication

$$(ag)(a'g') = ag(a'g')g'$$

L'algèbre $A * G$ admet aussi une structure de A -module à droite définie par

$$(ag).a' = (ag)(a'.1) = ag(a'.1)g.$$

Ensuite, cette action de G sur A induit une action sur $\text{mod}A$ comme suit : pour tout A -module M et $g \in G$, on définit ${}^g M$ le A -module ayant la même structure additive que M et dont la multiplication est donnée par $x.a = xg^{-1}(a)$, pour tous $x \in M$ et $a \in A$.

Proposition 2.1.4 [[ALR07](#), Lemme 4.1] *L'application $M \mapsto {}^g M$ induit un homomorphisme de G dans le groupe des automorphismes dans $\text{mod}A$.*

Démonstration 2.1.2 *On définit un foncteur ${}^g(-) : \text{mod}A \rightarrow \text{mod}A$ sur les objets M par ${}^g M$ et sur les morphismes A -linéaires $f : M \rightarrow N$ par ${}^g f : {}^g M \rightarrow {}^g N$, $x \mapsto f(x)$.*

Ce qui fait de ${}^g f$ un morphisme A -linéaire. En effet, pour tout $a \in A$ et $x \in M$ on a :

$${}^g f(x.a) = {}^g f(x.g^{-1}(a)) = f(x.g^{-1}(a)) = f(x)g^{-1}(a) = f(x).a.$$

Par conséquent le foncteur ${}^g(-)$ est bien un endofoncteur. De plus, puisque pour tout $g_1, g_2 \in G$, nous avons ${}^{g_1}({}^{g_2}(-)) = {}^{g_1 g_2}(-)$, donc, en particulier, on a ${}^g(-).{}^{g^{-1}}(-) = {}^{g^{-1}.g}(-) = \text{Id}_A$, pour tout $g \in G$. Ce qui fait de ${}^g(-)$ un automorphisme de $\text{mod}A$.

Le morphisme d'inclusion $A \hookrightarrow A * G$ défini par $a \mapsto a.1$, pour tout $a \in A$, induit les foncteurs de changement de scalaires $F = (A * G) \otimes_A - : \text{mod} A \longrightarrow \text{mod}(A * G)$ et $H = \text{Hom}_{A * G}(A * G, -) : \text{mod}(A * G) \longrightarrow \text{mod} A$.

La proposition 2.1.5 résume quelques propriétés de ces foncteurs.

Proposition 2.1.5 [[ALR07](#), 1.1, 1.8 (a) et (b)] *Soit $M, N \in \text{mod} A$ et $g \in G$*

- (i) (F, H) et (H, F) sont deux paires de foncteurs adjoints ;
- (ii) *Le sous ensemble $g \otimes_A M = \{g \otimes_A m \mid m \in M\}$ de $F(M)$ admet une structure de A -module définie par $a.(g \otimes_A m) = gg^{-1}(a) \otimes_A m = g \otimes_A g^{-1}(a)m = g \otimes_A (a.m)$, de sorte que $g \otimes_A M$ et ${}^g M$ soient isomorphes en tant que A -modules. Par conséquent, on a l'isomorphisme de A -modules*

$$F(M) \cong \bigoplus_{i=1}^n (g_i \otimes_A M) \cong \bigoplus_{i=1}^n {}^{g_i} M,$$

d'où

$$HF(M) \cong \bigoplus_{i=1}^n (g \otimes_A M) \cong \bigoplus_{i=1}^n {}^{g_i} M;$$

- (iii) *Étant donné un morphisme de A -modules $f : M \longrightarrow N$, l'application ${}^g f : {}^g M \longrightarrow {}^g N$ se traduit par $g \otimes_A M \longrightarrow g \otimes_A N : g \otimes_A m \mapsto g \otimes_A f(m)$;*
- (iv) *On a $F(M) \simeq F(N)$ si, et seulement si, il existe $g \in G$ tel que $M \simeq {}^g N$.*

Les algèbres $A * G$ et A partagent beaucoup de propriétés intéressantes. Par exemple, lorsque l'ordre de G est inversible dans A , $A * G$ est de représentation finie, c'est-à-dire auto-injective, de dimension globale finie, une algèbre d'Auslander, si et seulement si A l'est [[RR85](#)]. Une autre propriété importante, pour la suite au Chapitre 4, que partagent A avec $A * G$ est que A est Gorenstein si, et seulement si, $A * G$ l'est [[RR85](#), Proposition 3.3]. Cette propriété découle de la proposition 2.1.5(i). En effet, l'adjonction à gauche et à droite du foncteur F à H , et vice-versa, entraîne leurs exactitudes. Cela fait qu'ils préservent les projectifs ainsi que les injectifs. Mais comme $F(A) = A * G$, alors le résultat s'ensuit.

H. Lenzing a montré que, pour tout diagramme Euclidien Q et k un corps algébriquement clos, les kQ -modules indécomposables sont paramétrés par une courbe de $P_1(\mathbf{C})/G$ provenant de l'action des *groupes polyédriques* sur la *droite projective* $P_1(\mathbf{C})$, voir [Len86]. Les groupes polyédriques sont des sous-groupe du groupe spécial linéaire $SL(2, \mathbf{C})$, ils agissent naturellement sur l'anneau des polynômes $\mathbf{C}[x, y]$ en envoyant les éléments homogènes vers les éléments homogènes. Par exemple, le groupe cyclique pour $n \in \mathbb{N}$

$$G = G_{n+3} = \left\{ \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix} \mid \zeta = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \text{ où } k = 1, 2, \dots, n+3 \right\} \quad (2.1.1)$$

agit sur $\mathbf{C}[x, y]$ par $x \longmapsto \zeta x$ et $y \longmapsto \zeta^{-1}y$. Dans ce cas, l'anneau des coordonnées de $P_1(\mathbf{C})/G$ est l'anneau d'invariants $\mathbf{C}[x, y]^G$. Pour plus de détails, voir [McK83].

Soit alors Q un carquois et k un corps. On rappelle que l'*algèbre pré-projective* de Q est la k -algèbre $k\widehat{Q}/I$ de chemins dont les sommets sont ceux de Q et les flèches définies par $\widehat{Q}_1 = Q_1 \cup Q_1^{op}$, où Q_1^{op} est le carquois opposé de Q . Pour tout $\alpha \in Q_1$, on note $\widehat{\alpha}$ la flèche correspondante dans \widehat{Q}_1 . L'idéal I est engendré par les relations $\sum \alpha \widehat{\alpha}$ et $\sum \widehat{\alpha} \alpha$.

Le théorème 2.1.5 est énoncé en toute généralité pour un groupe polyédrique quelconque. Mais ici on s'intéresse uniquement au groupe cyclique tel que défini ci-haut 2.1.1.

Théorème 2.1.5 [Len86], [RVdB89] ou [CBH98] *L'algèbre pré-projective $\mathbb{C}\widehat{Q}/I$ correspondant à un carquois Euclidien Q est Morita équivalente à $\mathbb{C}[x, y] * G$.*

Enfin, cette action de G sur $\text{mod} A$, ou plus généralement sur une catégorie préadditive \mathfrak{C} , définit à son tour une catégorie dite *catégorie de groupe gauche* de \mathfrak{C} par G . Cette catégorie, due à Reiten-Riedtmann, aussi appelée *catégorie de Keroubi* et notée $\mathfrak{C} * G = \mathcal{K}(\mathfrak{C} * \{G\})$, est obtenue à partir de la catégorie $\mathfrak{C} * \{G\}$ en mettant tous les idempotents scindés dans $\mathfrak{C} * \{G\}$.

Définition 2.1.8 [RR85] *La sous catégorie pleine de $\mathfrak{C} * G$, notée $\mathfrak{C} * \{G\}$, a pour objets les orbites \mathcal{O}_X des objets X de \mathfrak{C} sous l'action de G . Un morphisme $f : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_Y$ de $\mathfrak{C} * \{G\}$ est défini par la matrice carrée (f_{g_i, g_j}) , où $f_{g_i, e} : X \longrightarrow {}^{g_i}Y$ est un morphisme arbitraire de \mathfrak{C} , et $f_{g_i, g_j} : {}^{g_j}X \longrightarrow {}^{g_i}Y$ égale à $g_j(f_{g_j^{-1}g_i, e})$. La composition des morphismes est donnée par la multiplication des matrices.*

En général, la catégorie $\mathfrak{C} * G$ n'est pas additive, elle l'est si \mathfrak{C} est additive. En outre, si G est un groupe fini d'ordre n inversible dans A , alors il existe une équivalence de catégories entre la catégorie des $A * G$ -modules de type fini et la catégorie de groupe gauche de $\text{mod} A$, voir [RR85, page 256], c'est-à-dire,

$$\text{mod}(A * G) \cong \text{mod}(A) * G \quad (2.1.2)$$

Théorème 2.1.6 *Soit A une k -algèbre 1-Gorenstein et G un groupe cyclique d'ordre inversible dans A . Alors il existe une équivalence entre la catégorie des $A * G$ -modules de Cohen-Macaulay et la catégorie de groupe gauche de la catégorie des A -modules de Cohen-Macaulay, c'est-à dire,*

$$\text{CM}(A * G) \cong \text{CM}(A) * G \quad (2.1.3)$$

Démonstration 2.1.3 *La preuve suit de l'équivalence $\text{mod}(A * G) \cong \text{mod}(A) * G$ induit par le théorème d'adjonction appliqué à la paire de foncteurs (F, H) combinée à la caractérisation des CM-modules comme sous module d'un module projectif, donnée au lemme 2.1.1, et du fait que l'endofoncteur $^g(-)$ préserve les modules de Cohen-Macaulay.*

Nous énonçons au lemme 2.1.2 quelques propriétés importantes auxquelles on s'intéresse que partage une catégorie avec sa catégorie de groupe gauche. Ce résultat élémentaire sera aussi utilisé au chapitre 4 comme argument à la catégorification de l'algèbre amassée de type Dynkin.

Lemme 2.1.2 *Soit \mathfrak{C} une catégorie additive. Les propriétés suivantes sont satisfaites :*

- (a) *La catégorie \mathfrak{C} est 2-Calabi-Yau si, et seulement si, sa catégorie de groupe gauche $\mathfrak{C} * G$ l'est.*
- (b) *La catégorie \mathfrak{C} est de Frobenius si, et seulement si, sa catégorie de groupe gauche $\mathfrak{C} * G$ l'est.*

Démonstration 2.1.4 *Soit X, Y dans \mathfrak{C} . Il existe une suite courte exacte de morphismes $\{\pi\} : 0 \longrightarrow \{Z\} \longrightarrow \{L\} \longrightarrow \{X\} \longrightarrow 0$ dans $\mathfrak{C} * G$, avec $\{L\}$ libre de type fini.*

D'abord, le foncteur $\text{Hom}_{\mathfrak{C}*G}(-, \{Y\})$ appliqué à (π) donne la suite exacte

$$\text{Hom}_{\mathfrak{C}*G}(\{L\}, \{Y\}) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{C}*G}(\{Z\}, \{Y\}) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathfrak{C}*G}^1(\{X\}, \{Y\}) \longrightarrow 0.$$

Puis, l'exactitude de $\{\pi\}$ entraîne celle de la suite $\pi : 0 \longrightarrow Z \longrightarrow L \longrightarrow X \longrightarrow 0$ dans \mathfrak{C} . Ensuite, le foncteur $\text{Hom}_{\mathfrak{C}}(-, {}^{g_i}Y)$ appliqué à celle-ci, induit la suite exacte

$$\bigoplus_i \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(L, {}^{g_i}Y) \longrightarrow \bigoplus_i \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(Z, {}^{g_i}Y) \longrightarrow \bigoplus_i \text{Ext}_{\mathfrak{C}}^1(X, {}^{g_i}Y) \longrightarrow 0. \quad (2.1.4)$$

Mais comme $f = (f_{g_i, g_j}) : \{g_j M\} \longrightarrow \{g_i N\}$ est uniquement déterminé par les morphismes $(f_{g_i, e}) : M \longrightarrow {}^{g_i}N$, dans \mathfrak{C} , donc $\text{Hom}_{\mathfrak{C}*G}(\{M\}, \{N\}) \cong \bigoplus_i \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(M, {}^{g_i}N)$, pour tout $1 \leq i \leq |G|$. Enfin, il suit l'isomorphisme $\text{Ext}_{\mathfrak{C}*G}^1(\{X\}, \{Y\}) \cong \bigoplus_i \text{Ext}_{\mathfrak{C}}^1(X, {}^{g_i}Y)$, pour tous X et Y , d'où la propriété (a). De même, $f = (f_{g_i, g_j}) : \{g_j M\} \longrightarrow \{g_i N\}$ étant aussi uniquement déterminé par les morphismes $(f_{g_i, e}) : {}^{g_i}M \longrightarrow N$, il suit l'isomorphisme $\text{Ext}_{\mathfrak{C}*G}^1(\{X\}, \{Y\}) \cong \bigoplus_i \text{Ext}_{\mathfrak{C}}^1({}^{g_i}Y, X)$, pour tous X et Y . La propriété (b) découle alors des deux derniers isomorphismes.

2.2 Singularités

Nous présentons brièvement l'approche algébrique de l'étude des *singularités d'hyper-surface*. Pour plus de détails, nous referons le lecteur à [Yos90].

Définition 2.2.1 *L'anneau noethérien commutatif local (R, \mathfrak{m}) est dit **singularité isolée** si, pour tout idéal premier \mathfrak{p} de R , l'anneau localisé $R_{\mathfrak{p}}$ est local et régulier. En particulier, les anneaux réguliers sont des singularités isolées.*

Par exemple, si (R, \mathfrak{m}) est un anneau complet 1-Gorenstein, alors R est une singularité isolée si, et seulement si, il est réduit.

Définition 2.2.2 *L'anneau (R, \mathfrak{m}, k) est dit **hensélien** si, pour tout polynôme unitaire $p \in R[x]$ tel que*

$$p \equiv \bar{p}_1 \bar{p}_2 \text{ modulo } \mathfrak{m},$$

où $\bar{p}_1, \bar{p}_2 \in k[x]$ co-premier, il existe des polynômes p_1, p_2 dans $R[x]$ tels que

$$p = p_1 p_2,$$

et $p_i \equiv \bar{p}_i$ modulo \mathfrak{m} , pour $i = 1, 2$.

Exemple 2.2.1 *Tout anneau local complet est hensélien. Par exemple, l'anneau régulier des séries formelles $k[[x_1, x_2, \dots, x_d]]$ en les variables x_i , pour $1 \leq i \leq d$, est un anneau local Hensélien.*

Les anneaux henséliens, introduits par Azumaya, jouent un rôle essentiel dans l'étude des *singularités*. En effet, si l'anneau (R, \mathfrak{m}) est 1-Gorenstein hensélien ou, plus généralement, s'il est Cohen-Macaulay hensélien, alors la catégorie $\text{mod} R$ est une *catégorie Krull-Schmidt*. Par conséquent, la catégorie $\text{CM}(R)$ hérite de cette propriété, voir [CR87, Proposition 30.6] et [Sko06, Théorème A.3].

Le théorème 2.2.1 est le résultat principal de l'étude de la théorie des représentation sur une singularité isolée. Ce théorème d'Auslander, originellement énoncé pour les anneaux complets Cohen-Macaulay, donne une condition nécessaire et suffisante de l'existence des suites presque scindées dans $\text{CM}(R)$.

Théorème 2.2.1 [Aus86a] *Soit l'anneau (R, \mathfrak{m}) complet 1-Gorenstein hensélien. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *R est une singularité isolée ;*
- (ii) *La catégorie $\text{CM}(R)$ admet des suites presque scindées.*

Ce théorème affirme que $\text{CM}(R)$ admet une translation d'Auslander-Reiten τ sans toutefois donner sa description. La définition 2.2.4 qui s'en vient montre comment celle-ci a été construite.

Définition 2.2.3 *Soit l'anneau (R, \mathfrak{m}) de Cohen-Macaulay. Un R -module de type fini M est dit **localement libre** sur le spectre premier $\text{Spec}(R)$ de R si le $R_{\mathfrak{p}}$ -module $M_{\mathfrak{p}}$ est libre pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$.*

Lemme 2.2.1 Soit (R, \mathfrak{m}) 1-Gorenstein de singularité isolée. Alors tout R -module de Cohen-Macaulay est localement libre sur $\text{Spec}(R)$.

Démonstration 2.2.1 Soit M un R -module de Cohen-Macaulay et $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \setminus \{\mathfrak{m}\}$ un idéal premier. Alors, $M_{\mathfrak{p}}$ est de Cohen-Macaulay sur $R_{\mathfrak{p}}$. D'autre part, l'anneau localisé $R_{\mathfrak{p}}$ étant régulier et local, car R une singularité isolée, on a que $\text{krdim}(R_{\mathfrak{p}}) = \dim_{\text{gl}}(R_{\mathfrak{p}}) = \text{depth}(R_{\mathfrak{p}})$. Par conséquent, la dimension projective de $M_{\mathfrak{p}}$ est finie. La formule d'Auslander-Buchsbaum, appliquée à $M_{\mathfrak{p}}$ en tant que $R_{\mathfrak{p}}$ s'écrit alors $\text{dp}(M_{\mathfrak{p}}) + \text{krdim}(R_{\mathfrak{p}}) = \text{depth}(R_{\mathfrak{p}})$, c'est-à-dire, $\text{dp}(M_{\mathfrak{p}}) = 0$, d'où $M_{\mathfrak{p}}$ libre sur $R_{\mathfrak{p}}$.

Définition 2.2.4 Soient l'anneau (R, \mathfrak{m}) de Cohen-Macaulay, M un R -module de type fini et $P_1 \xrightarrow{\varphi} P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ une présentation projective de M . Le **transposé d'Auslander** de M , noté $\text{Tr}(M)$, est le R^{op} -module défini par la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow M^* \longrightarrow P_0^* \longrightarrow P_1^* \longrightarrow \text{Tr}(M) \longrightarrow 0.$$

Théorème 2.2.2 [Aus78] Soit l'anneau (R, \mathfrak{m}) hensélien, K_R son module canonique et M un R -module de Cohen-Macaulay indécomposable non libre, mais localement libre sur $\text{Spec}(R)$. Alors

$$\tau(M) = \text{syz}^d(\text{Tr}(M))^{\vee}, \quad (2.2.1)$$

où $N^{\vee} = \text{Hom}_R(N, K)$. Si S est de plus 1-Gorenstein, l'égalité 2.2.1 devient alors

$$\tau(M) = \text{syz}^{2-d}(M) \quad (2.2.2)$$

$$= \text{syz}(M) \quad (2.2.3)$$

Pour plus de détails, nous référons le lecteur à [Aus78, Proposition 8.7., Proposition 1.3.] ou à [Yos90, Proposition 3.11].

On note que tout quotient $(S/I, \mathfrak{m})$ d'un anneau hensélien (S, \mathfrak{n}) est hensélien via la surjection canonique $S \longrightarrow S/I$ qui établit une correspondance bijective entre les idéaux de S et ceux de S/I [Rei95]. Ainsi en associant $\mathfrak{n} \mapsto \mathfrak{m}$, on peut alors approximer les solutions dans $(S/I)[x]$ en les relevant dans $S[x]$ puis les projetant dans $(S/I)[x]$. Ceci

nous assure que l'anneau $k[[x_1, x_2, \dots, x_d]]/f$, pour un certain $f \in k[[x_1, x_2, \dots, x_d]]$, auquel on s'intéressera à la section suivante et au chapitre 4 est hensélien.

Dans se qui reste de ce chapitre, nous considérerons l'anneau complet hensélien \widehat{R} ou simplement R (pour alléger la notation) étant l'*hypersurface* définie par une singularité $f \in S$, c'est-à-dire, $R = S/\langle f \rangle$, où $(S, \mathfrak{n}) = (k[[x_1, x_2, \dots, x_d]], \mathfrak{n})$.

Définition 2.2.5 Soit $R = S/\langle f \rangle$ et $c(f)$ un ensemble d'idéaux propres de S définis comme suit :

$$c(f) = \{I \mid \text{Idéal propre de } S : f \in I^2\}. \quad (2.2.4)$$

R est alors appelé une **hypersurface de singularité simple** ou tout simplement *singularité simple* si l'ensemble $c(f)$ est fini.

La définition précédente donne une forme particulière à la singularité f . Si f appartient à l'anneau des séries formelles $k[[x_0, \dots, x_r]] = S$, alors la proposition qui suit donne une description des formes que peut prendre une singularité simple, voir [Arn81], [Wal84].

Proposition 2.2.1 (Arnold) Soit R définie par la singularité $f \in S = k[[x_0, \dots, x_r]]$ et k est son corps de fractions. L'hypersurface R est une singularité simple si, et seulement si, f se présente sous l'une des formes suivantes :

$$\begin{aligned} (A_n) : f &= x_0^{n+1} + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_r^2, n \geq 1; \\ (D_n) : f &= x_0^{n-1} + x_0 x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_r^2, n \geq 4; \\ (E_6) : f &= x_0^4 + x_1^3 + x_2^2 + \dots + x_r^2; \\ (E_7) : f &= x_0^3 + x_0^3 x_1 + x_2^2 + \dots + x_r^2; \\ (E_8) : f &= x_0^5 + x_1^3 + x_2^2 + \dots + x_r^2. \end{aligned}$$

Ces types de singularités sont aussi appelées *singularités de Klein*. À chacune d'elle, il est associé le même type de *groupe de Klein*. Par exemple, si G est le groupe cyclique de Klein d'ordre $n + 3$ donné à l'équation (2.1.1), alors l'anneau des invariants $k[[x, y]]^G$ est une singularité de type A_n et est isomorphe à $k[[x, y]]/x^2 + y^{n+1}$, voir [Yos90, Page 94-95].

Un autre résultat principal portant sur les singularités est le théorème de Buchweitz-Greuel-Schreyer [BGS87] qui suit. Ce théorème montre qu’une hypersurface de singularité non-simple est de type CM-représentation infini.

Théorème 2.2.3 (Buchweitz-Greuel-Schreyer) *Soit $R = S/\langle f \rangle$ une hypersurface. Si R est de CM-représentation fini, alors R est une singularité simple.*

Ce théorème admet une réciproque. Celle-ci est le résultat de Knörrer et est démontrée pour un corps k de caractéristique $\text{car}(k) \neq 2$. Il montre que les anneaux locaux de singularité simple isolée ont la propriété d’avoir un nombre fini d’isoclasses de CM-modules. Plus précisément, le théorème s’énonce comme suit.

Théorème 2.2.4 [Knö87] *Soit $R = S/f$ l’hypersurface définie par $0 \neq f \in \mathfrak{n}$, où $S = k[[x_0, \dots, x_r]]$ est l’anneau local des séries formelles d’idéal maximal \mathfrak{n} et k un corps algébrique de caractéristique différente de 2. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*

- (1) *Il existe un nombre fini de R -modules de Cohen-Macaulay indécomposables à isomorphisme près,*
- (2) *R est un anneau d’hypersurface de singularité simple au sens d’Arnold.*

Nous terminons ce chapitre par une notion équivalente à celle de modules de Cohen-Macaulay sur l’anneau local hensélien d’hypersurface $R = k[[x]]/\langle f \rangle$, où $x = (x_0, \dots, x_d)$. Cette notion est celle de *factorisations de matrices*.

2.3 Factorisation de Matrices

En algèbre linéaire, si B est une matrice $m \times n$ de rang r , alors il existe une matrice X de taille $m \times r$ et une matrice Y de taille $r \times n$ telles que $B = XY$. Ce théorème de décomposition admet aussi une analogie en algèbre commutative. Suivant cette idée, Eisenbud a introduit dans [Eis80] la notion de *factorisation de matrices* d’un élément

f d'un anneau commutatif S . L'objectif était d'étudier les résolutions libres minimales périodiques sur l'hypersurface $S/\langle f \rangle$. Cette théorie de factorisations de matrices permet d'obtenir une description linéaire algébrique des modules de Cohen-Macaulay sur des singularités d'hypersurfaces simples isolées.

Définition 2.3.1 Soit $0 \neq f \in k[[x]] = k[[x_1, x_2, \dots, x_d]]$ un élément non inversible. Une **factorisation de matrices** de f d'ordre n est une paire de matrices $(\varphi, \psi)_{n \times n}$ dans $k[[x]]$ définies par les égalités $\varphi\psi = \psi\varphi = fI_n$, où fI_n est la matrice scalaire en f .

Une conséquence immédiate de cette définition donne deux exemples particuliers de matrices de factorisations, à savoir $(I_n, f.I_n)$ et $(f.I_n, I_n)$. Autre exemple, si A est une matrice d'ordre n , alors il existe une matrice $B = \text{Adj}(A)$ dite adjointe de A telle que $AB = BA = \det(A).I_n$. Cette formule donnant en générale l'inverse de A est un cas particulier de factorisation de matrice du déterminant $\det(A)$.

Définition 2.3.2 Un **morphisme de factorisations de matrices** de f de (φ_1, ψ_1) vers (φ_2, ψ_2) est la donnée d'une paire de matrices (α, β) telles que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccc} k[[x]]^{n_1} & \xrightarrow{\psi_1} & k[[x]]^{n_1} & \xrightarrow{\varphi_1} & k[[x]]^{n_1} \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta & & \downarrow \alpha \\ k[[x]]^{n_2} & \xrightarrow{\psi_2} & k[[x]]^{n_2} & \xrightarrow{\varphi_2} & k[[x]]^{n_2} \end{array} \quad (2.3.1)$$

Si α et β sont des isomorphismes, alors (φ_1, ψ_1) et (φ_2, ψ_2) sont dites *équivalentes*. Une factorisation de matrices (φ, ψ) de f est dite *réduite* si tous les coefficients dans φ et ψ sont différentes de l'unité.

La commutativité du carré de gauche dans le diagramme 2.3.1 entraîne celle du carré de droite et vice-versa. On construit la catégorie des factorisations de matrices de f dans $k[[x]]$, notée $\text{MF}_{k[[x]]}(f)$ comme suit.

- les objets sont les matrices de factorisations $(\varphi, \psi)_{n \times n}$
- un morphisme $(\alpha, \beta) : (\varphi_1, \psi_1) \longrightarrow (\varphi_2, \psi_2)$ est défini par la relation $\alpha\varphi_1 = \psi_2\beta$

- la composition des morphismes est définie par le produit matriciel et se fait composante par composante.

La catégorie $\text{MF}_{k[[x]]}(f)$ est additive. La somme directe est définie par

$$(\varphi_1, \psi_1) \oplus (\varphi_2, \psi_2) = \left(\begin{pmatrix} \varphi_1 & 0 \\ 0 & \varphi_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \psi_1 & 0 \\ 0 & \psi_2 \end{pmatrix} \right)$$

Eisenbud a montré que si (φ, ψ) est une factorisation de matrices de f d'ordre n , alors le $k[[x]]$ -module donné par la suite courte exacte

$$0 \longrightarrow k[[x]]^n \xrightarrow{\varphi} k[[x]]^n \longrightarrow M \longrightarrow 0 \quad (2.3.2)$$

est aussi un CM-module sur l'hypersurface $k[[x]]/\langle f \rangle$ [Eis80]. En effet, l'égalité $\varphi\psi(S^n) = fS^n$, entraîne que $fS^n \subset \text{Im}(\varphi)$, c'est-à-dire, $f.S^n/\text{Im}(\varphi) = 0$. Par conséquent, $fM = 0$, d'où M admet une structure de $k[[x]]/\langle f \rangle$ -module. La formule d'Auslander-Buchsbaum [AB57, Théorème 3.7] appliquée à M en tant que $k[[x]]$ -module affirme que $\text{depth}_{k[[x]]}(M) = \text{depth}(k[[x]]) - \text{dp}(M_{k[[x]])}$. La suite exacte 2.3.2 étant minimale, on a $\text{dp}(M_{k[[x]])} = 1$. L'anneau $k[[x]]$ est régulier et local, donc $k[[x]]_{k[[x]]} \in \text{CM}(k[[x]])$. Par conséquent $\text{depth}_{k[[x]]}(M) = \text{krdim}(k[[x]]/\langle f \rangle)$, c'est-à-dire $\text{Coker}(\varphi) = M \in \text{CM}(k[[x]]/\langle f \rangle)$. On peut définir alors un foncteur additif $\text{cok} : \text{MF}_{k[[x]]}(f) \longrightarrow \text{CM}(k[[x]]/\langle f \rangle)$ sur les objets par $\text{cok}(\varphi, \phi) = \text{Coker}(\varphi)$ et sur les morphismes par $\text{cok}(\alpha, \beta) = \gamma$, où le morphisme γ est induit par la relation $\alpha\varphi_1 = \varphi_2\beta$ modulo $\langle f \rangle$. Inversement, tout module de Cohen-Macaulay sur $k[[x]]/\langle f \rangle$ est donné de cette manière 2.3.2. En effet, si M est un $k[[x]]/\langle f \rangle$ -module de Cohen-Macaulay, alors la même formule d'Auslander-Buchsbaum affirme que $\text{dp}(M_{k[[x]])} = \text{depth}(k[[x]]) - \text{depth}_{k[[x]]}(M) = \text{krdim}(k[[x]]) - \text{krdim}(k[[x]]/\langle f \rangle) = 1$. Donc M admet une présentation projective exacte de $k[[x]]$ -modules

$$0 \longrightarrow k[[x]]^{n_2} \xrightarrow{\varphi} k[[x]]^{n_1} \longrightarrow M \longrightarrow 0 \quad (2.3.3)$$

Par conséquent, $n_2 \leq n_1$, car φ est un monomorphisme. D'autres part, on a $fM = 0$, c'est-à-dire, $f.k[[x]]^{n_1} \subseteq \text{Im}(\varphi)$. Donc pour tout $x \in k[[x]]^{n_1}$, il existe un unique $y \in k[[x]]^{n_2}$ (car φ un monomorphisme) tel que $fx = \varphi y$. Cette correspondance définit un morphisme

$\psi : k[[x]]^{n_1} \longrightarrow k[[x]]^{n_2}$ qui associe x à y . Ainsi, on a $fI_n x = \varphi\psi x$, pour tout $x \in k[[x]]^{n_1}$, d'où $fI_{n_1} = \varphi\psi$. Le morphisme ψ ainsi défini est aussi un monomorphisme (ce qui implique $n_1 \leq n_2$), car l'anneau $k[[x]]$ est intègre et f est non diviseur de zéro. Enfin, puisque $k[[x]]$ est commutatif, donc $fI_n\varphi = \varphi fI_n$ et φ un monomorphisme, alors $\varphi(\psi\varphi) = fI_n\varphi$, d'où $\psi\varphi = fI_n$, avec $n_1 = n_2$.

Soit $(\bar{\varphi}, \bar{\psi})$ la factorisation de matrices (φ, ψ) modulo $\langle f \rangle$.

Proposition 2.3.1 *Soit (φ, ψ) une factorisation de matrices d'ordre n de f correspondant au $k[[x]]$ -module M dans la suite exacte 2.3.2. Alors M admet une R -résolution projective 2-périodique :*

$$\cdots \longrightarrow R^n \xrightarrow{\bar{\varphi}} R^n \xrightarrow{\bar{\psi}} R^n \xrightarrow{\bar{\varphi}} R^n \xrightarrow{\bar{\psi}} R^n \xrightarrow{\bar{\varphi}} R^n \longrightarrow M \longrightarrow 0 \quad (2.3.4)$$

Démonstration 2.3.1 *L'égalité $\varphi\psi = \psi\varphi = f.I_n$ induit le complexe*

$$\cdots \longrightarrow R^n \xrightarrow{\bar{\varphi}} R^n \xrightarrow{\bar{\psi}} R^n \xrightarrow{\bar{\varphi}} R^n \xrightarrow{\bar{\psi}} R^n \xrightarrow{\bar{\varphi}} R^n \longrightarrow \cdots$$

Ce complexe est en fait exact. En effet, si $\bar{x} \in R^n$ ($x \in k[[x]]^n$) est tel que $\bar{\varphi}(\bar{x}) = 0$, c'est-à-dire, $\overline{\varphi(x)} = 0$, alors $\varphi(x) \in \langle f \rangle = fk[[x]]^n = \varphi\psi(k[[x]]^n)$. Par conséquent, $\bar{x} \in \text{Im}(\bar{\psi})$. De même, on montre que $\text{Ker}(\bar{\psi}) \subseteq \text{Im}\bar{\varphi}$. Il reste à montrer que $M = \text{Coker}\bar{\varphi}$. Par définition, on a $M = \text{Coker}\varphi$. Mais puisque $fM = 0$, donc $fk[[x]]^n \subseteq \varphi(k[[x]]^n)$, i.e $\langle f \rangle \subseteq \text{Im}\varphi$. Par conséquent, $\text{Im}\bar{\varphi} = \overline{\text{Im}\varphi} = \text{Im}\varphi/\langle f \rangle$. Finalement, on obtient que $\text{Coker}\bar{\varphi} = R^n/\text{Im}\bar{\varphi} \cong k[[x]]^n/\text{Im}\varphi$.

Remarque 2.3.1 *$\text{syz}_{\hat{R}}^{2i}(M) = M$, pour tout $i \in \mathbb{N}$, tandis que $\text{syz}_{\hat{R}}^{2i+1}(M) = N$ avec N donné par la factorisation de matrices (ψ, φ) de f .*

Les factorisations de matrices (I_n, fI_n) et (fI_n, I_n) de f sont des cas particuliers importants de factorisations de matrices. Elles correspondent respectivement dans R aux CM-modules 0 et R . Notons $\underline{\text{MF}}_{k[[x]]}(f) = \text{MF}_{k[[x]]}(f)/\langle (I_n, fI_n) \rangle$ la sous-catégorie pleine

de $\text{MF}_{k[[x]]}(f)$ obtenue en éliminant tous les morphismes dans $\text{MF}_{k[[x]]}(f)$ se factorisant à travers (I_n, fI_n) .

Le théorème d'Eisenbud qui suit est le résultat principal de l'étude des factorisations de matrices [Eis80, Corollaire 6.3] ou [Yos90, Théorème 7.4].

Théorème 2.3.1 (Eisenbud) *Soit S un anneau régulier et local, $0 \neq f \in S$ un élément non inversible et R l'hypersurface $S/\langle f \rangle$. Alors le foncteur coker induit des équivalences de catégories*

$$\underline{\text{MF}}_S(f) \cong \text{CM}(R) \quad (2.3.5)$$

$$\text{MF}_S(f)/\langle (I_n, fI_n), (fI_n, I_n) \rangle \cong \text{CM}(R)/\langle R \rangle. \quad (2.3.6)$$

Démonstration 2.3.2 *Nous montrons brièvement la première équivalence, la seconde est induite de la première et du fait que $\text{coker}(fI_n, I_n) = R$. On vérifie facilement que les foncteurs $\underline{\text{MF}}_S(f) \xrightarrow{\text{cok}} \text{CM}(R) \xrightarrow{\delta} \underline{\text{MF}}_S(f)$ sont des quasi-inverses l'un de l'autre. Le foncteur cok est induit par le foncteur coker et défini sur les objets (φ, ψ) par $\text{cok}(\varphi, \psi) = \text{Coker}(\varphi)$ et sur les morphismes (α, β) par*

$$\text{cok}(\alpha, \beta) = \begin{cases} 0 & \text{si } (\alpha, \beta) \text{ se factorise par } (I_n, fI_n) \\ \gamma & \text{sinon.} \end{cases}$$

tandis que le foncteur δ est défini comme suit

$$\delta : \text{CM}(R) \longrightarrow \underline{\text{MF}}_S(f)$$

$$\begin{array}{ccccccccc} M_1 & \longrightarrow & \delta(M_1) : 0 & \longrightarrow & S^{n_1} & \xrightarrow{\varphi_1} & S^{n_1} & \longrightarrow & M_1 \longrightarrow 0 \\ g \downarrow & & \delta(g) \downarrow & & \beta \downarrow & & \alpha \downarrow & & g \downarrow \\ M_2 & \longrightarrow & \delta(M_2) : 0 & \longrightarrow & S^{n_2} & \xrightarrow{\varphi_2} & S^{n_2} & \longrightarrow & M_2 \longrightarrow 0 \end{array}$$

Le foncteur δ ainsi construit est uniquement déterminé sur les objets M à équivalence près et sur les morphismes g à isomorphisme près.

D'autre part, si (φ, ψ) est réduite, alors $\text{Coker}(\varphi)$ n'admet pas de facteur direct libre. En effet, si N un facteur direct libre de (φ, ψ) , alors il existe un R -module X tel que

$\text{Coker}(\varphi) \cong R^n \oplus X$, avec $N \cong R^n$. Mais comme $R = \text{coker}(fI_n, I_n)$, il suit l'isomorphisme $(\varphi, \psi) \cong \bigoplus^n (fI_n, I_n) \oplus (\varphi_0, \psi_0)$, c'est-à-dire

$$(\varphi, \psi) \cong \left(\begin{pmatrix} \varphi_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & fI_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & fI_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \phi_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_n \end{pmatrix} \right)$$

pour un certain φ_0, ψ_0 tel que $\text{Coker}(\varphi_0, \psi_0) \cong X$, ce qui est absurde car la matrice de gauche admet des coefficients non tous différents de l'unité.

Toutefois, si la factorisation de matrices (φ, ψ) n'est pas réduite, alors (φ, ψ) admet (I_n, fI_n) comme facteur direct. Plus précisément, toute factorisation de matrice (φ, ψ) non réduite se décompose en une partie réduite et une non réduite comme suit

$$(\varphi, \psi) = \overbrace{(\varphi_0, \psi_0)}^{\text{réduite}} \oplus \overbrace{(fI_n, I_n)^p \oplus (I_n, fI_n)^q}^{\text{nonréduite}}.$$

Cette décomposition est unique à isomorphisme près. En effet, si

$$(\varphi'_0, \psi'_0) \oplus (fI_n, I_n)^{p'} \oplus (I_n, fI_n)^{q'}$$

est une autre décomposition de (φ, ψ) , alors en posant $M_0 = \text{cok}(\varphi_0, \psi_0)$ et $M'_0 = \text{cok}(\varphi'_0, \psi'_0)$, il suit que

$$M_0 \oplus R^p \cong M'_0 \oplus R^{p'}.$$

Mais comme (φ_0, ψ_0) et (φ'_0, ψ'_0) sont réduites, alors $M_0 \stackrel{g}{\cong} M'_0$. De plus, d'après l'unicité de la décomposition dans $\text{CM}(R)$, on a $p = p'$. Finalement, on a l'isomorphisme $(\varphi_0, \psi_0) \stackrel{\gamma(g)}{\cong} (\varphi'_0, \psi'_0)$ et, en comparant la taille des matrices, il suit que $q = q'$, d'où l'unicité.

Remarque 2.3.2 *Le théorème 2.3.1 combiné aux remarques précédentes établissent une correspondance bijective entre factorisations de matrices réduites et modules de Cohen-Macaulay n'ayant pas de facteurs directs libres.*

Plus précisément, on a la proposition qui suit.

Proposition 2.3.2 *Le foncteur $\underline{\text{MF}}_S(f) \xrightarrow{\text{cok}} \text{CM}(R)$ établit une correspondance bijective entre l'ensemble des factorisations de matrices réduites et l'ensemble des classes d'isomorphismes de modules de Cohen-Macaulay n'admettant pas de facteurs directs libres $\{(\varphi, \psi) \text{ réduites}\} \xrightarrow{\text{bijection}} \{\text{isoclasses de } \text{CM}(R)\text{-modules indécomposables}\}$*

Proposition 2.3.3 [*Yos90*, Proposition 7.7] *Soit $M \in \text{CM}(R)$ non libre et indécomposable donné par la matrice de factorisation réduite (φ, ψ) . Alors $\text{syz}_R^1 M$ est aussi indécomposable et non libre. De plus, $\text{syz}_R^1 M = \text{Cok}(\psi, \varphi)$.*

Démonstration 2.3.3 *Il est évident que $(\varphi, \psi) \in \underline{\text{MF}}_S(f)$ si, et seulement, si $(\psi, \varphi) \in \underline{\text{MF}}_S(f)$. De même (ψ, φ) est réduite si, et seulement, si (φ, ψ) l'est. D'autre part, la résolution libre 2-périodique 2.3.1 de M induit les suites courtes exactes*

$$0 \longrightarrow \text{Coker}(\overline{\psi}) \longrightarrow R^n \longrightarrow M \longrightarrow 0 \quad (2.3.7)$$

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\overline{\varphi}) \longrightarrow R^n \longrightarrow \text{Ker}(\overline{\psi}) \longrightarrow 0 \quad (2.3.8)$$

Il reste à établir que $\text{Ker}(\overline{\psi}) \cong \text{Coker}(\overline{\psi})$. On a $\text{Coker}(\overline{\psi}) = R^n / \text{Im}(\overline{\psi}) = R^n / \text{Ker}(\overline{\varphi})$. Or d'après la deuxième suite exacte 2.3.8, on a $\text{Ker}(\overline{\psi}) \cong R^n / \text{Ker}(\overline{\varphi})$, d'où l'égalité voulue. Par conséquent, il suit de la première suite exacte 2.3.8 que $\text{syz}_R^1 M = \text{Cok}(\psi, \varphi)$.

Remarque 2.3.3 [*Yos90*] *Soit M comme dans 2.3.3 et $N \in \text{CM}(R)$ correspondant à la matrice de factorisation (φ', ψ') . Si $h : N \longrightarrow \text{syz}_R^1(M)$ est un R -homomorphisme, alors il existe un morphisme de factorisations de matrices $(\alpha, \beta) = \gamma(h) : (\varphi', \psi') \longrightarrow (\psi, \varphi)$ défini par $\text{cok}(\alpha, \beta) = h$. On construit ainsi une nouvelle factorisation de matrice de f*

$$\left(\begin{pmatrix} \varphi & \beta \\ 0 & \varphi' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \psi & -\alpha \\ 0 & \psi' \end{pmatrix} \right)$$

Le morphisme $\gamma(h)$ est donné par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & S^{n_1} & \xrightarrow{\varphi'} & S^{n_1} & \longrightarrow & N \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \beta & & \downarrow \alpha & & \downarrow h \\ 0 & \longrightarrow & S^{n_2} & \xrightarrow{\psi} & S^{n_2} & \longrightarrow & \text{syz}_R^1(M) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Il est facile de vérifier, utilisant la commutativité du diagramme 2.3.3, que 2.3.3 est bien une factorisation de matrice de f .

En notant L le R -module de Cohen-Macaulay correspondant à la factorisation de matrices 2.3.3, on obtient la suite courte exacte $0 \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow N \longrightarrow 0$. La classe de cette suite dans $\text{Ext}_R^1(N, M)$ est en fait l'image de h par l'application naturelle $\rho : \text{Hom}_R(N, \text{syz}_R^1 M) \longrightarrow \text{Ext}_R^1(N, M)$. Puisque ρ est surjectif, alors toute extension de M par N est obtenue de cette façon.

Chapitre 3

Sur les algèbres de bords d'une surface marquée avec ponctions

Les *carquois avec potentiel* associés à une surface à bords marqués (S, M) ont été introduits et étudiés par D. Labardini-Fragoso dans le cadre de la mutation. Dans sa thèse, il montre, comme dans [DWZ08], que si σ et σ' sont deux triangulations de (S, M) reliées par un flip, alors les carquois avec potentiels (Q_σ, W_σ) et $(Q_{\sigma'}, W_{\sigma'})$ sont reliés par une mutation qui respecte le flip. Dans la première section, nous présentons ces notions et celle de l'algèbre jacobienne gelée associée à un carquois avec potentiel (Q, W) . Certaines algèbres jacobiniennes gelées peuvent aussi être construites à partir d'une surface de Riemann. Dans ce chapitre on s'intéresse en particulier à l'algèbre jacobienne gelée provenant d'une surface à bords marqués avec ponction. Sa construction a été introduite et étudiée par Demonet-Luo [DL16a] dans le cas d'un polygone régulier sans. Dans la deuxième section, nous donnons d'abord une construction générale de celle-ci pour une surface de Riemann puis montrons que son algèbre de bords associée ne dépend pas du choix du carquois géométrique, voir théorème 3.2.1. Ce théorème est le résultat principal de cette thèse. Ensuite, nous donnons aux théorèmes 3.2.3 et 3.2.5 une forme explicite des algèbres jacobiniennes à bords gelés associées au polygone sans et avec une ponction. L. Démonet et X. Luo ont aussi déterminé ces algèbres, voir théorèmes 3.2.1 et 3.2.18, mais

nous proposons ici une autre version relativement plus simple et utilisant des techniques de calculs différents. Enfin, nous généralisons ces résultats par récurrence en déterminant au théorème 3.2.6 une forme générale explicite de celles-ci dans le cas d'un polygone à p -ponctions quelconque $(P_{n+3,p})$.

3.1 Carquois avec potentiel

Les *carquois avec potentiels* sont l'oeuvre de Derksen, Weyman, et Zelevinsky. Ce type de carquois, initialement introduits dans [DWZ08], a été largement étudié dans le cadre de la mutation [Kel05]. Un élément *potentiel* d'un carquois Q est une combinaison linéaire de cycles de Q . Cette combinaison peut être finie ou infinie. Dans ce chapitre, comme dans [DWZ08], nous travaillons sur l'*algèbre des chemins complète*.

Soit $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ un carquois fini, connexe, et sans boucle avec $Q_0 = \{1, 2, \dots, n\}$. Considérons l'*algèbre de chemins* $K\langle Q \rangle = \bigoplus_{i \geq 0} KQ_i$, où KQ_i est l'ensemble des chemins de longueur i dans Q . À $K\langle Q \rangle$ on associe l'*algèbre de chemins complète*, notée $K\langle\langle Q \rangle\rangle$, définie, en tant que K -espace vectoriel, comme étant l'ensemble des combinaisons linéaires de chemins infinis possibles dans Q , c'est-à-dire,

$$K\langle\langle Q \rangle\rangle = \prod_{i \geq 0} KQ_i;$$

dont la multiplication est induite par concaténation des chemins. Notons que dans le cas où le carquois Q est acyclique, l'espace vectoriel $KQ_i = \{0\}$, pour i assez grand. Ainsi, il suit que

$$K\langle\langle Q \rangle\rangle = K\langle Q \rangle,$$

par conséquent elle est de dimension finie.

Exemple 3.1.1 Dans le cas où Q est donné par le carquois

$$\alpha \curvearrowright 1,$$

l'*algèbre* $K\langle Q \rangle$ est isomorphe à l'*algèbre des polynômes* $K[x]$ tandis que $K\langle\langle Q \rangle\rangle$ est isomorphe à l'*algèbre des séries formelles* $K[[x]]$.

Soit \mathbf{m} l'idéal bilatère de $K\langle\langle Q \rangle\rangle$ engendré par l'ensemble des flèches défini par

$$\mathbf{m} = \prod_{i \geq 1} KQ_i$$

dont une puissance est donnée par

$$\mathbf{m}^n = \prod_{i \geq n} KQ_i.$$

Soit $K\langle\langle Q \rangle\rangle_{cycl}$ l'espace vectoriel engendré par les chemins cycliques de longueur $l \geq 2$. Les définitions qui suivent sont l'œuvre de Derksen-Weyman-Zelevinsky dans [DWZ08].

Définition 3.1.1 *Un **potentiel** \mathcal{W} dans Q est un élément, peut-être infini, de $K\langle\langle Q \rangle\rangle_{cycl}$.*

La notion de potentiel est un outil permettant de décrire les relations de certaines algèbres de chemins. Ces relations se calculent à l'aide d'une *dérivation cyclique*.

Définition 3.1.2 *Soit $\alpha \in Q_1$. Une **dérivation cyclique** par rapport à α , notée ∂_α , est un morphisme K -linéaire $K\langle\langle Q \rangle\rangle_{cycl} \longrightarrow K\langle\langle Q \rangle\rangle$ qui, à tout cycle $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_l$, associe la somme*

$$\partial_\alpha(\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_l) = \sum_{\alpha=\alpha_i} \alpha_{i+1} \dots \alpha_l \alpha_1 \dots \alpha_{i-1}$$

Les dérivations cycliques ne dépendent pas du choix des cycles autour d'un sommet. Dans \mathcal{W} , chaque cycle peut être écrit avec différentes sources. Donc plusieurs potentiels peuvent avoir la même dérivation cyclique. Pour les identifier, Derksen-Weyman-Zelevinsky ont considéré les potentiels à rotation près.

Définition 3.1.3 *Deux potentiels \mathcal{W} et \mathcal{W}' sont **cycliquement équivalents** si le chemin $\mathcal{W} - \mathcal{W}'$ est décrit par les termes de la forme $a_1 \dots a_{n-1}a_n - a_2 \dots a_na_1 \dots$*

Définition 3.1.4 *Un **carquois avec potentiel** est un couple (Q, \mathcal{W}) formé d'un carquois fini, connexe, et sans boucle et d'un potentiel \mathcal{W} n'admettant pas de chemins cycliques cycliquement équivalents.*

Un carquois avec potentiel est donc un carquois dans lequel les relations sont encodées dans un potentiel. Dans ce potentiel nous considérons tous les cycles *simples* ou *minimaux*, c'est-à-dire chaque cycle passe par le même sommet exactement une fois.

Définition 3.1.5 *Un carquois avec potentiel (Q, \mathcal{W}) ou simplement un potentiel \mathcal{W} est dit **trivial** s'il est homogène de degré 2, c'est-à-dire, s'il est constitué uniquement de 2-cycles et est dit **réduit** s'il n'admet pas de 2-cycles.*

Soit (Q, \mathcal{W}) un carquois avec potentiel. Soit \mathcal{I} l'idéal engendré par les flèches de l'algèbre de chemins kQ , on définit l'idéal \mathcal{I}_{triv} engendré par les flèches apparues dans les 2-cycles du potentiel et $\mathcal{I}_{red} = \mathcal{I}/\mathcal{I}_{triv}$ et on note Q_{triv} un carquois dont les flèches engendrent \mathcal{I}_{triv} et Q_{red} un carquois dont les flèches engendrent l'idéal \mathcal{I}_{red} . Soit k un sommet de Q . On suppose que k n'appartient à aucun 2-cycle et que \mathcal{W} n'admet pas de cycle commençant et terminant par k (sinon on le remplace par le potentiel cycliquement équivalent ne l'ayant pas)

Définition 3.1.6 *La mutation de (Q, \mathcal{W}) au sommet k est le nouveau carquois avec potentiel, noté $(\bar{Q}, \bar{\mathcal{W}}) = (\tilde{Q}_{red}, \tilde{\mathcal{W}}_{red})$, obtenu à partir de $(\tilde{Q}, \tilde{\mathcal{W}})$ comme suit.*

1. Pour le carquois \tilde{Q} :

- Pour tout chemin $i \xrightarrow{\alpha} k \xrightarrow{\beta} j$ de longueur 2 passant par k , on ajoute une nouvelle flèche notée $i \xrightarrow{[\alpha\beta]} j$;
- On change le sens de toutes les flèches α incidentes à k et on les note α^* .

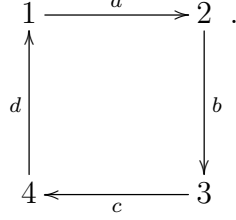
2. Pour le potentiel $\tilde{\mathcal{W}}$:

- On substitue dans \mathcal{W} tout facteur de chemin de longueur 2 de la forme $i \xrightarrow{\alpha} k \xrightarrow{\beta} j$ par la nouvelle flèche $[\alpha\beta]$ et on note $[\mathcal{W}]$;
- Pour chaque nouvelle flèche $[\alpha\beta]$, on ajoute un nouveau cycle noté $[\alpha\beta]\alpha^*\beta^*$.

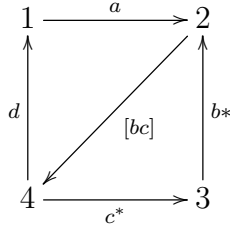
Le potentiel $\tilde{\mathcal{W}}$ s'écrit alors

$$\tilde{\mathcal{W}} = [\mathcal{W}] + \Delta_k, \text{ où } \Delta_k = \sum_{s(\beta)=t(\alpha)=k} [\alpha\beta]\beta^*\alpha^*.$$

Exemple 3.1.2 Soit Q le carquois linéaire de type $\tilde{\mathbb{A}}_4$ qui suit

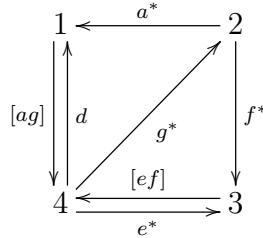


Soit $\mathcal{W} = abcd$ un potentiel de Q . On note que tous les sommets de Q sont admissibles à une mutation pour le carquois avec potentiel (Q, \mathcal{W}) , sauf le sommet 1. Ceci parce que le cycle du potentiel commence ou termine par 1. La mutation effectuée au sommet 3 correspond au carquois avec potentiel $(\overline{Q}, \overline{\mathcal{W}})$ qui suit



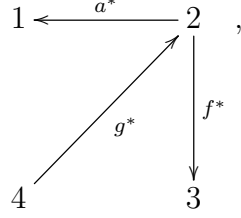
$$\overline{\mathcal{W}} = a[bc]d + [bc]c^*b^*$$

Toutefois, si on veut effectuer une mutation sur un tel sommet, par exemple ici le sommet 2 du carquois avec potentiel $(\overline{Q}, \overline{\mathcal{W}})$, il faut remplacer $\overline{\mathcal{W}}$ par un potentiel cycliquement équivalent, soit $\mathcal{W}' = a[bc]d + c^*b^*[bc]$. On pose $e = c^*$, $f = b^*$ et $g = [bc]$. La mutation au sommet 2 donne le carquois avec potentiel $(\tilde{Q}', \tilde{\mathcal{W}}')$ défini comme suit



$$\tilde{\mathcal{W}}' = [ag]d + e[fg] + [ag]g^*a^* + [fg]g^*f^*.$$

Le carquois \tilde{Q}' est non réduit. Sa version réduite correspond au carquois



où

$$\overline{W'} = \tilde{W'}_{red} = 0.$$

Les relations encodées dans \mathcal{W} sont définies par l'idéal bilatère engendré par les dérivations cycliques, noté $\langle \partial_a W \rangle$. Posons $\mathcal{J}(W) = \langle \langle \partial_a W \mid a \in Q_1 \rangle \rangle$ sa clôture. Ces relations définissent une algèbre dite *algèbre jacobienne*, notée $\mathcal{P}(Q, \mathcal{W})$.

Définition 3.1.7 [DWZ08] *L'algèbre jacobienne de (Q, \mathcal{W}) est le quotient de l'algèbre de chemins complète sur (Q, \mathcal{W}) par l'idéal jacobien $\mathcal{J}(W)$, c'est-à-dire*

$$\mathcal{P}(Q, \mathcal{W}) = K\langle\langle Q \rangle\rangle / \mathcal{J}(W)$$

.

Une généralisation de cette algèbre a été définie par Buan-Iyama-Reiten-Smith en gelant une partie de celle-ci. Cette nouvelle algèbre, appelée *algèbre jacobienne gelée*, est définie naturellement à partir d'un carquois dit *carquois à potentiel gelé*.

Définition 3.1.8 [BIRS11] *Un carquois à potentiel gelé est un triplet $(Q, \mathcal{W}, \mathcal{F})$, où (Q, \mathcal{W}) carquois avec potentiel et \mathcal{F} est un sous-ensemble de Q_0 dont les éléments sont appelés sommets gelés. L'algèbre jacobienne gelée, notée $\Gamma = \mathcal{P}(Q, \mathcal{W}, \mathcal{F})$, est le quotient de l'algèbre de chemins complète sur $(Q, \mathcal{W}, \mathcal{F})$ par l'idéal bilatère $\mathcal{J}(\mathcal{W}, \mathcal{F})$:*

$$\mathcal{P}(Q, \mathcal{W}, \mathcal{F}) = K\langle\langle Q \rangle\rangle / \mathcal{J}(\mathcal{W}, \mathcal{F}),$$

où

$$\mathcal{J}(\mathcal{W}, \mathcal{F}) = \langle \langle \partial_\alpha \mathcal{W} \mid \alpha \in Q_1 : s(\alpha) \notin \mathcal{F} \text{ ou } b(\alpha) \notin \mathcal{F} \rangle \rangle.$$

3.2 Construction de l'algèbre Jacobienne gelée provenant d'une surface de Riemann

Soit (S, M) une surface à bords marqués avec ponctions et σ une triangulation associée. La définition qui suit est la version non réduite de celle donnée dans [LF10].

Définition 3.2.1 *On associe à σ le carquois géométrique avec potentiel $(Q'_\sigma, \mathcal{W}'_\sigma)$:*

- *L'ensemble des sommets $(Q'_\sigma)_0$ est indexé par les arcs étiquetés de σ , voir 1.2.3;*
- *Si i et j sont deux arcs étiquetés de σ bordant un même triangle Δ , alors il existe une flèche interne allant de i vers j si, en pivotant dans (S, M) autour de leur point d'intersection dans le sens anti-horaire, on passe d'abord par i puis par l'intérieur de Δ puis par j . On dit alors que i est prédécesseur de j dans le sens anti-horaire.*

Dans Q'_σ , il apparait deux types de cycles :

- *Les triangles horaires, notés Δ_i , c'est-à-dire, dont l'orientation des flèches suivent le sens horaire ;*
- *Les cycles anti-horaires internes, notés Δ_{p_k} , formés autour des points de ponctions.*

Le potentiel \mathcal{W}'_σ est donc donné par :

$$\sum \Delta_i - \sum \Delta_{p_k}.$$

Exemple 3.2.1 *La figure 3.1 est un exemple de deux carquois avec potentiels provenant d'une triangulation σ du disque (assimilé à un carré) à une ponction. Dans le carquois de gauche le potentiel est formé juste d'un seul cycle, le cycle anti-horaire interne, tandis que celui de droite admet un potentiel formé des deux types de cycles. Dans ce cas les relations dans l'algèbre jacobienne du carquois associé sont juste des relations de commutativité.*

En considérant les cotés du carré dans le figure 3.1 comme étant des sommets et en définissant de nouvelles flèches, on peut plonger le carquois géométrique avec potentiel

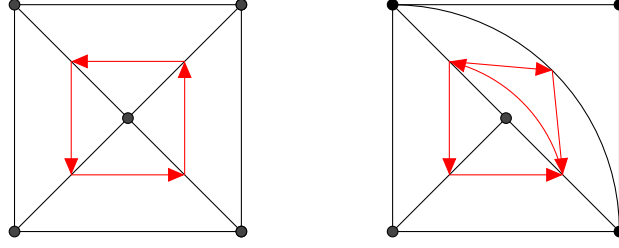


FIGURE 3.1 – Carquois avec potentiel associé à σ .

$(Q'_\sigma, \mathcal{W}'_\sigma)$ dans un nouveau carquois beaucoup plus grand. Ce nouveau carquois, noté $(Q_\sigma, \mathcal{W}_\sigma, \mathcal{F})$, est le *carquois géométrique à potentiel gelé*.

Tout d'abord, notons P_i , pour tout $1 \leq i \leq |M \cap \partial_S|$, les points marqués du bord et indexons par i la partie du bord, dite *arc de bord*, délimité par les points marqués P_{i-1} et P_i . On a alors $i = (P_{i-1}, P_i)$, pour tout $2 \leq i \leq |M \cap \partial_S|$ et $1 = (P_{|M \cap \partial_S|}, P_1)$. On note que dans le cas où la surface (S, M) admet plus d'un bord, comme dans le cas de l'anneau, on numérote l'autre bord séparément, par exemple avec un indice j , mais de la même façon. Dans ce cas $M \cap \partial_S = M \cap \partial_{S_1} \cup M \cap \partial_{S_2}$ et i varie de 1 à $|M \cap \partial_{S_1}|$ sur le premier bord et j de 1 à $|M \cap \partial_{S_2}|$ sur le second. La définition qui suit est une généralisation de celle donnée par Demonet-Luo dans le cas d'un polygone à une ponction.

Définition 3.2.2 Soit \mathcal{F} les arcs de bords. Le *carquois géométrique à potentiel gelé* $(Q_\sigma, \mathcal{W}_\sigma, \mathcal{F})$ associé à σ est alors défini comme suit :

- Le carquois Q_σ est le carquois dont l'ensemble des sommets $(Q_\sigma)_0$ est formé des sommets de $(Q'_\sigma)_0$ et des éléments de \mathcal{F} , c'est-à-dire,

$$(Q_\sigma)_0 = (Q'_\sigma)_0 \cup \mathcal{F};$$

- Pour tout $i \in (Q'_\sigma)_0$ et $j \in \mathcal{F}$, il existe une flèche $\alpha_{i,j}$ de source i et de but j , si i est prédécesseur de j dans le sens anti-horaire, ou une flèche $\alpha_{j,i}$ au cas contraire ;
- Pour tout point marqué P_i de ∂_S , il existe une flèche externe, notée Y_i , allant de la section du bord i vers j si, en pivotant autour de P_i dans le sens anti-horaire, on passe d'abord par i puis par j .

- L'ensemble des flèches de Q_σ est alors formé des flèches de Q'_σ , des flèches $\alpha_{i,j}$ et $\alpha_{j,i}$ et des flèches externes, c'est-à-dire

$$(Q_\sigma)_1 = (Q'_\sigma)_1 \cup \{\alpha_{i,j}, \beta_{j,i} : i, j \in \mathcal{F} ; i \in (Q'_\sigma)_0, j \in \mathcal{F}\} \cup \{Y_i : 1 \leq i \leq |M \cap \partial_S|\}$$

Dans ce cas le potentiel \mathcal{W}_σ est donné par la somme de celui dans le carquois (Q'_σ) et des cycles anti-horaires externes autour des points marqués P_i , notés Δ_{P_i} :

$$\mathcal{W}_\sigma = \mathcal{W}'_\sigma - \sum \Delta_{P_i}.$$

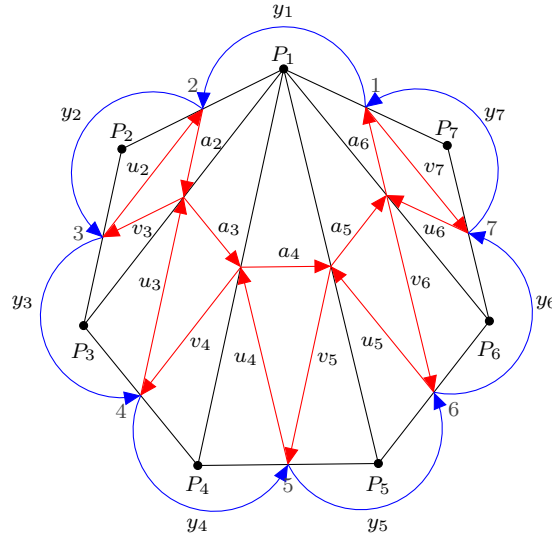


FIGURE 3.2 – Carquois gelé avec potentiel associé à une triangulation d'un heptagone.

Exemple 3.2.2 La figure 3.2 est un exemple de triangulation d'un heptagone régulier sans ponction. Par abus de langage, nous appellerons une telle triangulation une triangulation linéaire. Soit $\mathcal{F} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. On a

$$\mathcal{W}_\sigma = \sum_{i=2}^6 v_{i+1} u_i a_i - a_2 \dots a_6 y_1 - \sum_{i=3}^6 u_i v_i y_i - u_2 y_2 - v_7 y_7,$$

$$\mathcal{J}(\mathcal{W}_\sigma, \mathcal{F}) = \langle u_2 a_2 - y_3 u_3, u_i a_i - y_{i+1} u_{i+1}, a_i v_{i+1} - v_i y_i, a_6 v_7 - v_6 y_6, v_{i'+1} u_{i'} - a_{i'+1} \dots a_6 y_1 a_2 \dots a_{i'-1} \rangle,$$

pour tout $2 < i < 6$ et $2 \leq i' \leq 6$, avec $u_7 = e_7$, $v_2 = e_2 = a_1$ et $a_7 = e_1$.

Dans l'exemple précédant on note que le potentiel \mathcal{W}_σ est réduit et que toutes les relations dans l'algèbre jacobienne gelée associée sont engendrées par des relations de commutativité données par les mailles de la forme :



FIGURE 3.3 – Différents types de mailles obtenues dans $(Q_\sigma, \mathcal{W}_\sigma, \mathcal{F})$.

Soit maintenant σ une triangulation quelconque associée à une surface de bords marqués avec ponctions (S, M) . La figure 3.4 montre les différents transformations locales dans $(Q_\sigma, \mathcal{W}_\sigma, \mathcal{F})$ suite à un flip sur l'un quelconque des arcs étiquetés de (S, M) . Le premier flip f_1 utilise un quadrilatère ne contenant aucune ponction et dont les sommets sont dans $M = \partial_S \cup \text{int}(S)$ tandis que le dernier type de flip f_2 utilise un digone avec une ponction dont les sommets sont aussi formés dans M .

Théorème 3.2.1 *Soit $e_{\mathcal{F}} = \sum_{i \in \mathcal{F}} e_i$. L'algèbre jacobienne gelée de bord $e_{\mathcal{F}} \Gamma_\sigma e_{\mathcal{F}}$ associée à la surface (S, M) est indépendante du choix de σ , à isomorphisme près.*

Démonstration 3.2.1 *Soit $\overline{x_1}, \overline{x_3}$ des chemins complétant les cycles anti-horaires autour soit des points marqués (soit des ponctions) P_1 et P_3 respectivement. Le potentiel du carquois gelé (Q_σ, \mathcal{F}) est alors donné par*

$$\mathcal{W}_\sigma = \left(\sum_{i \neq k} \Delta_i + u_1 v_3 x_2 + u_3 v_1 x_4 \right) - \left(\sum_{j \neq 1, 3} \Delta_{P_j} + u_1 v_1 \overline{x_1} + u_3 v_3 \overline{x_3} \right) - \sum \Delta_{p_i}.$$

Désignons par $\mathcal{W}_{\sigma, k}$ et $\mathcal{W}_{\sigma \setminus \{k\}}$ les potentiels définis par les cycles du potentiel \mathcal{W}_σ admettant et n'admettant pas de flèches incidentes au sommet k , respectivement. Alors on a que

$$\mathcal{W}_\sigma = \mathcal{W}_{\sigma \setminus \{k\}} + \mathcal{W}_{\sigma, k}, \text{ où}$$

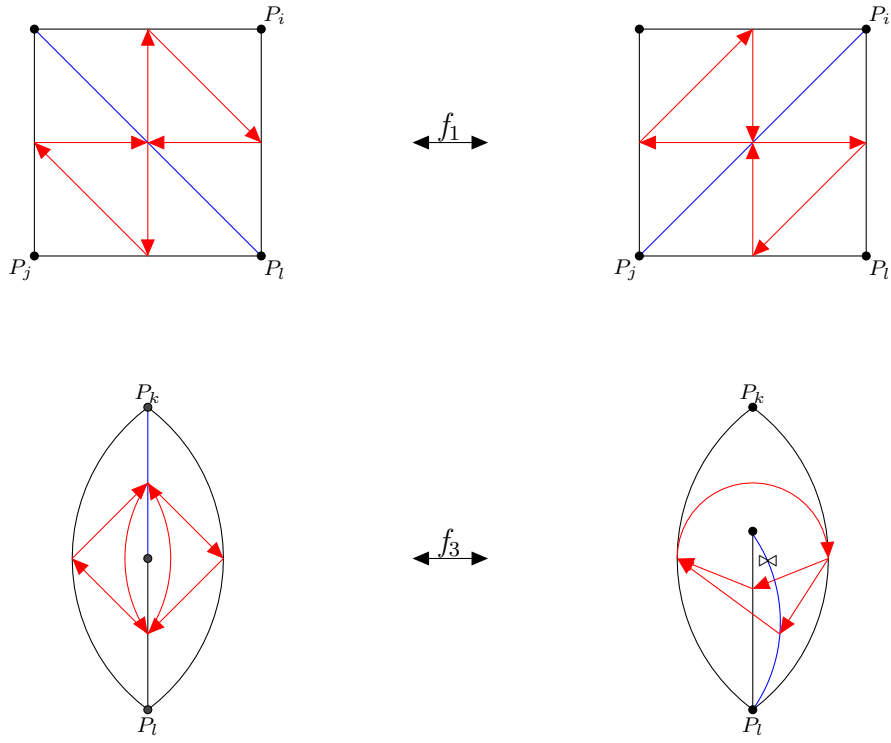


FIGURE 3.4 – Différents flips possibles

$$\mathcal{W}_{\sigma \setminus \{k\}} = \sum_{i \neq k} \Delta_i - \sum_{j \neq 1,3} \Delta_{P_j} - \sum \Delta_{p_i} \quad \text{et} \quad \mathcal{W}_{\sigma, k} = u_1 v_3 x_2 + u_3 v_1 x_4 - u_1 v_1 \overline{x_1} - u_3 v_3 \overline{x_3}$$

Soit l'algèbre de chemins $A = (1 - e_k)kQ_\sigma(1 - e_k)$ et Q_A son carquois associé. Le carquois Q_A est obtenu de Q_σ en supprimant le sommet k et toutes les flèches incidentes

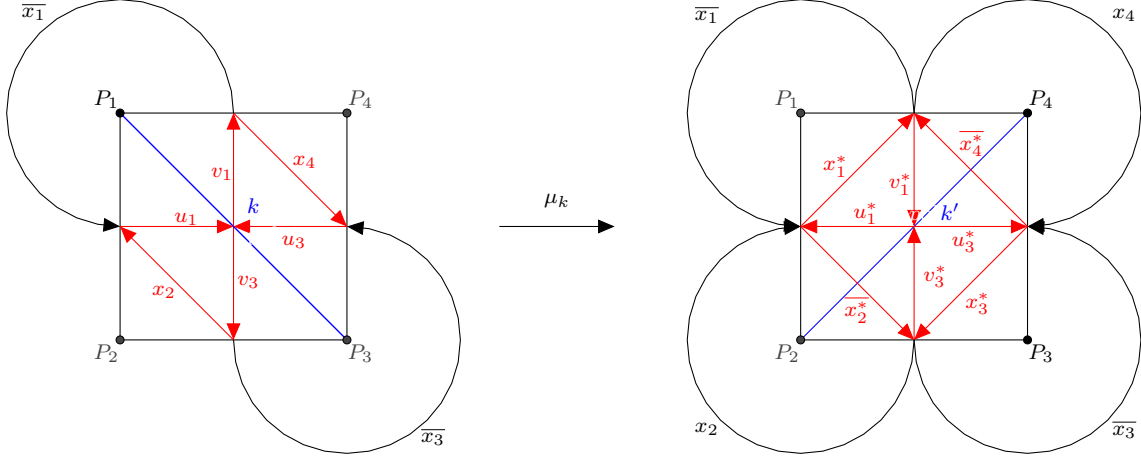


FIGURE 3.5 – Mutation du carquois Q_0 en k .

en k et en ajoutant de nouvelles flèches $x_1, \overline{x_2}, x_3$, et $\overline{x_4}$ correspondant bijectivement aux chemins u_1v_1, u_1v_3, u_3v_3 , et u_3v_1 dans Q_σ , respectivement, c'est-à-dire,

$$Q_A = \begin{cases} (Q_A)_0 = (Q_\sigma)_0 \setminus \{k\} \\ (Q_A)_1 = ((Q_\sigma)_1 \setminus \{u_1, v_1, u_3, v_3\}) \cup \{x_1, \overline{x_2}, x_3, \overline{x_4}\} \end{cases}$$

Soit α dans $(Q_\sigma)_1$ telle que $\alpha \in \{u_1, v_1, u_3, v_3\}$ et γ une flèche quelconque dans Q_σ telle que $s(\gamma) \notin \mathcal{F}$ ou $t(\gamma) \notin \mathcal{F}$. La dérivation cyclique du potentiel dans Q_σ s'écrit

$$\partial \mathcal{W}_\sigma = \partial_{\gamma \neq \alpha} \mathcal{W}_{\sigma \setminus \{k\}} + \partial_\alpha \mathcal{W}_{\sigma, k}.$$

Le terme $\partial_{\gamma \neq \alpha} \mathcal{W}_{\sigma \setminus \{k\}}$ donne les mêmes relations dans Q_A et Q_σ tandis que la dérivation cyclique $\partial_\alpha \mathcal{W}_{\sigma, k}$ autour des flèches u_1, v_1, u_3 , et v_3 incidentes en k induit de nouvelles relations de commutativité dans Q_A données par : (a) : $x_3x_2 = \overline{x_4x_1}$ et (a') : $\overline{x_2}x_2 = x_1\overline{x_1}$, (b) : $x_4x_3 = \overline{x_1x_2}$ et (b') : $\overline{x_1}x_1 = x_4\overline{x_4}$, (c) : $x_1x_4 = \overline{x_2x_3}$ et (c') : $\overline{x_4}x_4 = x_3\overline{x_3}$, (d) : $x_2x_1 = \overline{x_3x_4}$ et (d') : $x_2\overline{x_2} = \overline{x_3}x_3$, respectivement. Soit maintenant σ' la triangulation obtenue de σ en effectuant un flip sur l'arc k . Notons $\mu_k(Q_\sigma, \mathcal{F}) = (Q_{\sigma'}, \mathcal{F})$ le nouveau carquois gelé associé à σ' . Le carquois $(Q_{\sigma'}, \mathcal{W}_{\sigma'}, \mathcal{F})$ est relié à $(Q_\sigma, \mathcal{W}_\sigma, \mathcal{F})$ par la mutation

μ_k respectant le flip sur k et le nouveau potentiel est donné par

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{\sigma'} &= [\mathcal{W}_\sigma] + \Delta_k \\ &= \mathcal{W}_{\sigma \setminus \{k\}} + [\mathcal{W}_{\sigma,k}] + \Delta_k\end{aligned}$$

On note que les potentiels \mathcal{W}_σ et $\mathcal{W}_{\sigma'}$ ont un terme commun, à savoir $\mathcal{W}_{\sigma \setminus \{k\}}$. Autrement dit, les relations engendrées par $\partial_{\gamma \neq \alpha} \mathcal{W}_\sigma$ et $\partial_{\gamma \neq \alpha} \mathcal{W}_{\sigma'}$ sont les mêmes dans $e_{\mathcal{F}}(kQ_\sigma)e_{\mathcal{F}}$ et $e_{\mathcal{F}}(kQ_{\sigma'})e_{\mathcal{F}}$ respectivement. Par conséquent, les algèbres jacobiniennes gelées $e_{\mathcal{F}}\Gamma_\sigma e_{\mathcal{F}}$ et $e_{\mathcal{F}}\Gamma_{\sigma'} e_{\mathcal{F}}$ sont partout identiques "sauf" aux cas locaux illustrés dans la figure 3.5. On a

$$\mathcal{W}_{\sigma,k} = u_1 v_3 x_2 + u_3 v_1 x_4 - u_1 v_1 \overline{x_1} - u_3 v_3 \overline{x_3}$$

et

$$\Delta_k = [u_1 v_3] v_3^* u_1^* + [u_3 v_1] v_1^* u_3^* - [u_1 v_1] v_1^* u_1^* - [u_3 v_3] v_3^* u_3^*.$$

On pose $[u_1 v_1] = x_1^*$, $[u_1 v_3] = \overline{x_2^*}$, $[u_3 v_3] = x_3^*$, $[u_3 v_1] = \overline{x_4^*}$, et soit $A' = (1 - e_{k'})kQ_{\sigma'}(1 - e_{k'})$ l'algèbre des chemins du carquois

$$Q_{A'} = \begin{cases} (Q_{A'})_0 = (Q_{\sigma'})_0 \setminus \{k'\} \\ (Q_{A'})_1 = ((Q_{\sigma'})_1 \setminus \{u_1^*, v_1^*, u_3^*, v_3^*\}) \cup \{\overline{x_1^*}, x_2^*, \overline{x_3^*}, x_4^*\} \end{cases}$$

défini de la même façon que Q_A . Les nouvelles flèches $\overline{x_1^*}, x_2^*, \overline{x_3^*}$, et x_4^* dans Q_A correspondent bijectivement aux chemins $v_1^* u_1^*, v_3^* u_1^*, v_3^* u_3^*$, et $v_1^* u_3^*$ dans $Q_{\sigma'}$ respectivement. Soit maintenant une flèche α^* dans $Q_{A'}$ telle que $\alpha^* \in \{x_1^*, \overline{x_2^*}, x_3^*, \overline{x_4^*}\}$ et β^* dans $Q_{\sigma'}$ tel que $\beta \in \{u_1^*, v_1^*, u_3^*, v_3^*\}$. On affirme que les nouvelles relations engendrées par la dérivation cyclique $\partial_{\alpha^*, \beta^*}([\mathcal{W}_{\sigma,k}] + \Delta_k)$ autour des flèches incidentes en k' dans $(Q_{A'}, \mathcal{F})$ sont les mêmes que celles engendrées par $\partial_\alpha \mathcal{W}_{\sigma,k}$ dans (Q_A, \mathcal{F}) . On a

$$\partial_{\alpha^*, \beta^*}([\mathcal{W}_{\sigma,k}] + \Delta_k) = \partial_{\alpha^*}[\mathcal{W}_{\sigma,k}] + \partial_{\beta^*} \Delta_k$$

avec

$$\Delta_k = \overline{x_2^*} v_3^* u_1^* + \overline{x_4^*} v_1^* u_3^* - x_1^* v_1^* u_1^* - x_3^* v_3^* u_3^*$$

et

$$\begin{aligned} [\mathcal{W}_{\sigma, k}] &= [u_1 v_3] x_2 + [u_3 v_1] x_4 - [u_1 v_1] \overline{x_1} + [u_3 v_3] \overline{x_3} \\ &= \overline{x_2^*} x_2 + \overline{x_4^*} x_4 - x_1^* \overline{x_1} - x_3^* \overline{x_3} \end{aligned}$$

La dérivation cyclique $\partial_{\beta^*} \Delta_k$ induit dans A' les nouvelles relations $(e) : x_1^* x_4^* = \overline{x_2^* x_3^*}$ et $(e') : x_1^* \overline{x_1^*} = \overline{x_2^*} x_2^*$, $(f) : \overline{x_3^* x_4^*} = x_2^* x_1^*$ et $(f') : x_4^* \overline{x_4^*} = \overline{x_1^*} x_1^*$, $(g) : \overline{x_4^* x_1^*} = x_3^* x_2^*$ et $(g') : \overline{x_4^*} x_4^* = x_3^* \overline{x_3^*}$, $(h) : \overline{x_1^* x_2^*} = x_4^* x_3^*$, et $(h') : x_2^* \overline{x_2^*} = \overline{x_3^*} x_3^*$. En identifiant bijectivement dans A' , d'une part, les nouvelles flèches x_i^* pour $i = 1, 3$ et $\overline{x_i^*}$ pour $i = 2, 4$, induites par la mutation en k , par les flèches x_i pour $i = 1, 3$ et $\overline{x_i}$ pour $i = 2, 4$, respectivement dans A via cette même mutation et, d'autre part, les nouvelles flèches $\overline{x_i^*}$ pour $i = 1, 3$ et x_i^* pour $i = 2, 4$ par les flèches $\overline{x_i}$ pour $i = 1, 3$ et x_i pour $i = 2, 4$, respectivement dans A via la dérivation $\partial_{\alpha^*} [\mathcal{W}_{\sigma, k}]$, on construit un isomorphisme de carquois $\varphi : A' \rightarrow A$ défini comme suit

$$\begin{aligned} \varphi_0 : A'_0 &\longrightarrow A_0 \\ e_i &\longmapsto e_i, i \neq k \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_1 : A'_1 &\longrightarrow A_1 \\ \alpha &\longmapsto \begin{cases} \overline{x_i} & \text{si } \alpha \in \{\overline{x_i^*} : i = 1, 2, 3, 4\} \\ x_i & \text{si } \alpha \in \{x_i^* : i = 1, 2, 3, 4\} \\ \alpha & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Une vérification rapide montre que $\varphi(e) = (c)$ et $\varphi(e') = (a')$, $\varphi(f) = (d)$ et $\varphi(f') = (b')$, $\varphi(g) = (a)$ et $\varphi(g') = (c')$, $\varphi(h) = (b)$ et $\varphi(h') = (d')$. Autrement dit, φ est un isomorphisme compatible avec les relations dans A' et A . Nous venons de montrer que les algèbres $e\Gamma_{\sigma}e$ et $e'\Gamma_{\sigma'}e'$ sont isomorphes. Par conséquent, il en est de même pour les algèbres de bord $e_{\mathcal{F}}\Gamma_{\sigma}e_{\mathcal{F}}$ et $e_{\mathcal{F}}\Gamma_{\sigma'}e_{\mathcal{F}}$. Mais, puisque le diagramme d'arcs complexes de $A^{\infty}(S, M)$ est de type fini, c'est-à-dire, toutes les triangulations de (S, M) sont mutation équivalentes, alors il suit que $e_{\mathcal{F}}\Gamma_{\sigma}e_{\mathcal{F}}$ est indépendante du choix de σ .

Théorème 3.2.2 (Demonet-Luo) *Soit k un corps et $R = k[x]$. L'algèbre jacobienne à bords gelés $e_{\mathcal{F}}\Gamma_{\sigma}e_{\mathcal{F}}$ associée au polygone sans ponction $(P_{n+3,0})$ est isomorphe à l'algèbre matricielle*

$$\Lambda := \begin{pmatrix} R & R & R & \cdots & R & (x^{-1}) \\ (x) & R & R & \cdots & R & R \\ (x^2) & (x) & R & \cdots & R & R \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (x^2) & (x^2) & (x^2) & \cdots & R & R \\ (x^2) & (x^2) & (x^2) & \cdots & (x) & R \end{pmatrix}_{(n+3) \times (n+3)} \quad (3.2.1)$$

Démonstration 3.2.2 [*DL16a*, Théorème 2.25.]

Nous proposons au théorème 3.2.3 une autre version de cette algèbre Λ . Soit n un entier naturel positif quelconque tel que $n = |s| - 3$, où $|s|$ désigne le nombre de sommets du polygone $(P_{n+3,0})$ et σ la même triangulation linéaire que dans l'exemple 3.2. On note que, de manière générale, le carquois de l'algèbre jacobienne à bords gelés associée à $(P_{n+3,p})$, pour tout $p \in \{0, 1\}$, se présente comme dans la figure 3.6 qui suit.

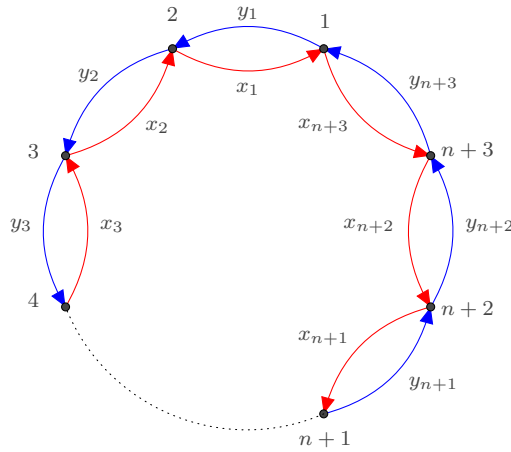


FIGURE 3.6 – Carquois de $e_{\mathcal{F}}\Gamma_{\sigma}e_{\mathcal{F}}$ associée à $(P_{n+3,p})$

Théorème 3.2.3 *L'algèbre jacobienne à bords gelés $e_{\mathcal{F}}\Gamma_{\sigma}e_{\mathcal{F}}$ associée au polygone sans ponction $(P_{n+3,0})$ est isomorphe à l'algèbre de groupe gauche de la singularité de Klein de type \mathbb{A}_n , c'est-à-dire*

$$e_{\mathcal{F}}\Gamma_{\sigma}e_{\mathcal{F}} \cong (k[[x, y]]/x^2 = y^{n+1}) * G_{n+3},$$

où G_{n+3} est le groupe cyclique d'ordre $n+3$ donné par

$$G_{n+3} = \{g = \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix} \mid \zeta = e^{i\frac{2k\pi}{n+3}}, \text{ où } k = 1, 2, \dots, n+3\}$$

.

Démonstration 3.2.3 *Soit \mathcal{B} une base de kQ_{σ} . Alors, $\mathcal{B} = \{e_i, e_{i'}, \alpha_{i,j}, \beta_{k,l}\}$, avec $i, j \in \mathcal{F}$, $i' \notin \mathcal{F}$, et k où $l \notin \mathcal{F}$. Puisque toutes les relations \sim dans KQ_{σ} sont des relations de commutativité, alors, d'après [DL16a, lemme 2.11.], il suit que \mathcal{B}/\sim est aussi une base de $\Gamma_{\sigma} = \mathcal{P}(Q_{\sigma}, \mathcal{W}_{\sigma}, \mathcal{F})$ de sorte qu'on a $e_i(\mathcal{B}/\sim)e_j = \{\overline{e_{i'}}, \overline{\alpha_{i,j}}\} = \{\overline{e_j}, \overline{x^m}, \overline{y^m}, \overline{ua^mv}, \overline{(xy)^m}\}$, pour tout $i' \in \mathcal{F}$ et $m \geq 1$, où les variables e', x, y, u, v et a sont représentées par les chemins $e'_i x_i, y_i, u_i, v_i$, et a_i , pour tout $1 \leq i \leq n+3$, avec $x_1 = a_2a_3\dots a_{n+2}$, $x_2 = u_2$, $x_{n+3} = v_{n+3}$, et $x_i = u_iv_i$, $3 \leq i \leq n+2$. Les dérivations cycliques sur le potentiel W_{σ} données par les mailles nous permettent d'établir, pour tout $2 \leq i \leq n+2$, avec $v_2 = a_1 = e_1$ et $u_{n+3} = a_{n+3} = e_{n+3}$, que :*

$$\partial_{v_{i+1}}\mathcal{W}_{\sigma} : u_ia_i = y_{i+1}u_{i+1}; \quad (3.2.2)$$

$$\partial_{u_i}\mathcal{W}_{\sigma} : a_iv_{i+1} = v_iy_i; \quad (3.2.3)$$

$$\partial_{a_i}\mathcal{W}_{\sigma} : v_{i+1}u_i = a_{i+1}\dots a_{n+2}y_1a_2\dots a_{i-1}, \quad (3.2.4)$$

où $\mathcal{W}_{\sigma} = \sum_{i=2}^{n+2} v_{i+1}u_ia_i - a_2\dots a_{n+2}y_1 - u_2y_2 - \sum_{i=3}^{n+2} u_iv_iy_i - v_{n+3}y_{n+3}$. Pour $i = 2$, les relations (0.3.2) et (0.3.3) entraînent que $y_2x_2 = x_1y_1$ et, pour $2 \leq i \leq n+2$, les relations (0.3.1) et (0.3.2) entraînent que $x_iy_i = y_{i+1}x_{i+1}$ de sorte que, pour tout $1 \leq i \leq n+2$, on a la commutativité suivante :

$$x_iy_i = y_{i+1}x_{i+1}. \quad (3.2.5)$$

D'autre part, on a :

$$x_{i+1}x_i = u_{i+1}v_{i+1}u_iv_i \quad (3.2.6)$$

$$= u_{i+1}(v_{i+1}u_i)v_i \quad (3.2.7)$$

$$= u_{i+1}(a_{i+1}\dots a_{n+2}y_1a_2\dots a_{i-1})v_i \quad (3.2.8)$$

$$= (u_{i+1}a_{i+1})a_{i+2}\dots a_{n+2}y_1a_2\dots a_{i-2}(a_{i-1}v_i) \quad (3.2.9)$$

$$= y_{i+2}(u_{i+2}a_{i+2})a_{i+3}\dots a_{n+2}y_1a_2\dots a_{i-3}(a_{i-2}v_{i-1})y_{i-1}. \quad (3.2.10)$$

En répétant le même processus $[(n+2) - (i+1) + 1] + [(i-1) - 2 + 1] = n$ fois dans l'équation (0.3.8), il suit que :

$$x_i x_i = y_{i+2}y_{i+3}\dots y_{n+3}y_1y_2\dots y_{i-2}y_{i-1} \quad (3.2.11)$$

$$= \prod_{k=1}^{n+1} y_{i+k}, \quad (3.2.12)$$

avec $(i+k)$ modulo $n+3$. De même,

$$u_i a_i a_{i+1} \dots a_{i+m-1} v_{i+m} = (u_i a_i) a_{i+1} \dots a_{i+m-1} v_{i+m} \quad (3.2.13)$$

$$= y_{i+1}(u_{i+1}a_{i+1})a_{i+2}\dots a_{i+m-1}v_{i+m}. \quad (3.2.14)$$

En répétant le même processus $(i+m-1) - i + 1 = m$ fois, on obtient que :

$$u_i a_i a_{i+1} \dots a_{i+m-1} v_{i+m} = y_{i+1}y_{i+2}\dots y_{i+m}u_{i+m}v_{i+m} \quad (3.2.15)$$

$$= y_{i+1}y_{i+2}\dots y_{i+m}x_{i+m}. \quad (3.2.16)$$

Une base de $e_{\mathcal{F}}\Gamma_{\sigma}e_{\mathcal{F}}$ devient alors $e_{\mathcal{F}}(\mathcal{B}/\sim)e_{\mathcal{F}} = \{\overline{e'}, \overline{xy^m}, \overline{y^{m+1}}\}$, pour tout $i \in \mathcal{F}$ et $m \in \mathbb{N}$, dont la multiplication est réduite à la multiplication dans le monoïde $\{\overline{x}, \overline{y}\}$ tel que $\overline{xy} = \overline{y\overline{x}}$ et $\overline{x^2} = \overline{y^{n+1}}$. Soit maintenant $\pi(\tilde{A}_{n+2})$ l'algèbre pré-projective correspondant au carquois double $\widehat{\tilde{A}_{n+2}}$ de l'algèbre jacobienne gelée de bord $e_{\mathcal{F}}\Gamma_{\sigma}e_{\mathcal{F}}$. Le théorème 2.1.5 entraîne que $\pi(\tilde{A}_{n+2})$ est Morita équivalente à $k[[x, y]] * G_{n+3}$. L'identité 1 de $k[[x, y]]$ se décompose dans $k[[x, y]] * G_{n+3}$, sous l'action de G_{n+3} , en les idempotents e_i définis, pour tout $0 \leq i \leq n+2$, par

$$e_{i+1} = \frac{1}{n+3}(1 + \zeta^i g + \zeta^{2i} g^2 + \dots + \zeta^{i(n+2)} g^{n+2}), \quad (3.2.17)$$

où ζ désigne la racine $(n+3)$ -ème de l'unité et g le générateur de G_{n+3} . Posons alors $e_{\mathcal{F}} = \sum_{i=1}^{n+3} e_i$. Soit l'idéal $I = \langle x^2 - y^{n+1} \rangle$ et considérons le morphisme k -linéaire $\varphi : k[[x, y]] * G_{n+3} \rightarrow e_{\mathcal{F}} \Gamma_{\sigma} e_{\mathcal{F}}$ défini par $e' \mapsto e'$, $x \mapsto \bar{x}$, et $y \mapsto \bar{y}$. Par construction, φ est surjectif et $\text{Ker} \varphi = I$. Par conséquent, on a l'isomorphisme de k -algèbres $k[[x, y]] * G_{n+3}/I \cong e_{\mathcal{F}} \Gamma_{\sigma} e_{\mathcal{F}}$. Mais comme l'idéal I est G_{n+3} -stable, il suit, d'après [RR85], que les algèbres $k[[x, y]] * G_{n+3}/I$ et $(k[[x, y]]/I) * G_{n+3}$, sont isomorphes, d'où l'isomorphisme $e_{\mathcal{F}} \Gamma_{\sigma} e_{\mathcal{F}} \cong (k[[x, y]]/x^2 = y^{n+1}) * G_{n+3}$.

Exemple 3.2.3 Dans le cas où $p = 0$ et $n = 3$, voir l'exemple 3.2 de l'heptagone, on a les relations $I = \langle xy - yx, x^2 - y^5 \rangle$.

Théorème 3.2.4 (Demonet-Luo) Soit k un corps et $R' = k[x, y]/y(x - y)$. L'algèbre jacobienne à bords gelés $e_{\mathcal{F}} \Gamma_{\sigma}^1 e_{\mathcal{F}}$ associée au polygone à une ponction $(P_{n+3,1})$ est isomorphe à l'algèbre matricielle

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} R' & R' & R' & \cdots & R' & x^{-1}(x, y) \\ (x, y) & R' & R' & \cdots & R' & R' \\ (x) & (x, y) & R' & \cdots & R' & R' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (x) & (x) & (x) & \cdots & R' & R' \\ (x) & (x) & (x) & \cdots & (x, y) & R' \end{pmatrix}_{(n+3) \times (n+3)}, \quad (3.2.18)$$

où chaque coefficient de la matrice est un R' -sous module de l'anneau $R'[x^{-1}]$.

Démonstration 3.2.4 [DL16b, Théorème 2.24.]

Nous reformulons le théorème 3.2.3 au cas du polygone à une ponction et proposons également une autre version de l'algèbre Λ' .

Théorème 3.2.5 L'algèbre jacobienne gelée de bord $e_{\mathcal{F}} \Gamma_{\sigma}^1 e_{\mathcal{F}}$ associée au polygone à une ponction $(P_{n+3,1})$ est isomorphe à l'algèbre de groupe gauche $R_1 * G_{n+3}$, où R_1 est la

singularité de Klein de type \mathbb{A}_{2n+3} et G_{n+3} le groupe cyclique d'ordre $n+3$ donné ci-haut, c'est-à-dire

$$e_{\mathcal{F}} \Gamma_{\sigma}^1 e_{\mathcal{F}} \cong (k[[z, y]]/z^2 = y^{(2n+3)+1}) * G_{n+3}$$

Démonstration 3.2.5 Considérons la triangulation σ qui consiste à relier la ponction à chaque sommet du polygone comme l'illustre la figure 3.7 pour le cas du carré à une ponction.

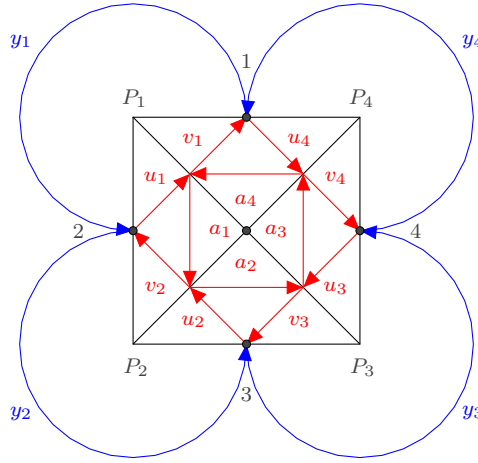


FIGURE 3.7 – Triangulation du carré à une ponction $P_{4,1}$

Les dérivations cycliques sur le potentiel $\mathcal{W}_{\sigma} = \sum_{i=1}^{n+3} v_{i+1} u_i a_i - \sum_{i=1}^{n+3} u_i v_i y_i - a_1 a_2 \dots a_{n+3}$ du polygone à une ponction $(P_{n+3,1})$ donné par les mailles nous permettent d'établir que :

$$\partial_v \mathcal{W}_{\sigma} : ua = yu; \quad (3.2.19)$$

$$\partial_u \mathcal{W}_{\sigma} : av = vy; \quad (3.2.20)$$

$$\partial_a \mathcal{W}_{\sigma} : vu = a^{n+2}, \quad (3.2.21)$$

où les variables x , y , u , v et a sont données comme dans la preuve du théorème 3.2.3. Les équations (0.3.16) et (0.3.17) donnent la relation de commutativité $xy = yx$ tandis que celle de (0.3.18) combinée aux deux autres entraînent que $x^2 = u(vu)v = ua^{n+2}v =$

$ua^{n+1}(av) = ua^{n+1}vy = \dots = ua(av)y^n = u(av)y^{n+1} = (uv)y^{n+2} = xy^{n+2}$. D'autre part, $ua^mv = (ua)a^{m-1}v = y(ua)a^{m-2}v = \dots = y^m(uv) = y^mx = xy^m$. De même $e_{\mathcal{F}}\Gamma_{\sigma}e_{\mathcal{F}}$ admet comme base $e_{\mathcal{F}}(\mathcal{B}/\sim)e_{\mathcal{F}} = \{\overline{e'}, \overline{xy^m}, \overline{y^{m+1}}\}$, pour tout $i \in \mathcal{F}$ et $m \in \mathbb{N}$, dont la multiplication est réduite à la multiplication dans $\{\overline{x}, \overline{y}\}$ telle que $\overline{xy} = \overline{yx}$ et $\overline{x^2} = \overline{xy^{n+2}}$. En utilisant les mêmes arguments que dans la preuve du théorème 3.2.3, on déduit que

$$e_{\mathcal{F}}\Gamma_{\sigma}^1e_{\mathcal{F}} \cong (k[[x, y]]/x^2 = xy^{n+2}) * G_{n+3}$$

. Enfin, en faisant le changement de variable $2x = z + y^{n+2}$, il s'ensuit que

$$e_{\mathcal{F}}\Gamma_{\sigma}^1e_{\mathcal{F}} \cong (k[[z, y]]/z^2 = y^{(2n+3)+1}) * G_{n+3}.$$

Plus précisément, on a $z_i = 2x_i - \prod_{k=1}^{n+1+p} y_{i+k}$

Enfin, soit maintenant p un entier naturel quelconque. Nous généralisons les théorèmes 3.2.3 et 3.2.5 proposées aux cas des polygones à p -ponctions (P_{n+3}, p) , pour tout $p \in \{0, 1\}$.

Théorème 3.2.6 *L'algèbre jacobienne à bords gelés associée au polygone à p -ponctions (P_{n+3}, p) , notée $e_{\mathcal{F}}\Gamma_{\sigma}^pe_{\mathcal{F}}$, est isomorphe à l'algèbre de groupe gauche de G_{n+3} sur l'anneau quotient $k[[x, y]]/x^2 = x^py^{n+1+p}$, c'est-à-dire,*

$$e_{\mathcal{F}}\Gamma_{\sigma}^pe_{\mathcal{F}} \cong (k[[x, y]]/x^2 = x^py^{n+1+p}) * G_{n+3},$$

où G_{n+3} le sous groupe cyclique d'ordre $n+3$ de $SL(K, 2)$ défini par

$$G_{n+3} = \left\{ \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix} \mid \zeta = e^{i\frac{2k\pi}{n+3}}, \text{ où } k = 1, 2, \dots, n+3 \right\}$$

.

Démonstration 3.2.6 *La preuve de ce théorème va se faire par récurrence sur p . La vérification du cas $p = 1$ est assurée par le théorème 3.2.5. Dans la suite, nous allons supposer l'énoncé de récurrence vrai au rang $p-1$ et essayer de la démontrer au rang p . Soit σ la triangulation de $(P_{n+3,p})$ définie comme dans la figure 3.8 où σ'' et σ' sont des triangulations associées aux polygones $P_{4,1}$ et $P_{n+1,p-1}$ formés par les sommets $P_1, P_{n+1}, P_{n+2}, P_{n+3}$ et*

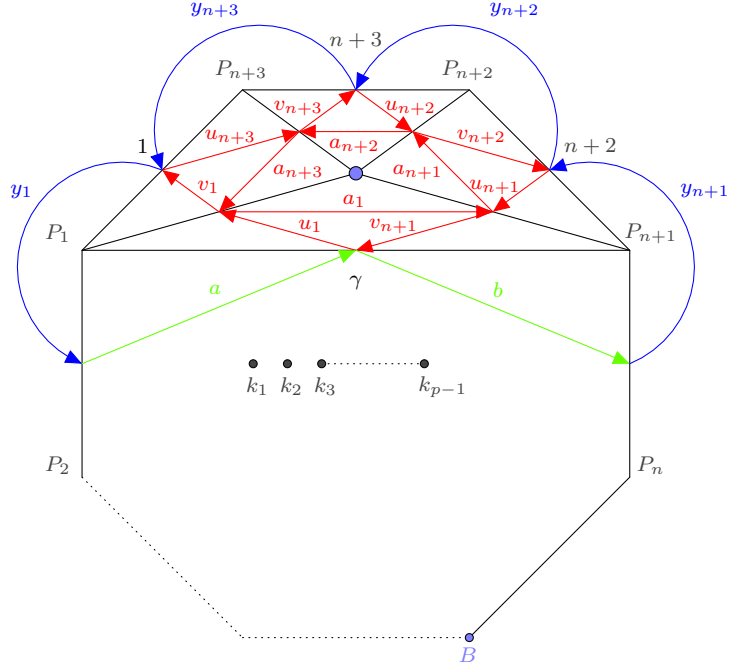


FIGURE 3.8 – Triangulation σ' et σ'' de $(P_{n+3,p})$

P_1, P_2, \dots, P_{n+1} respectivement. La triangulation σ'' est telle que toutes les ponctions k_i sont liées successivement par un arc et que chaque sommet P_i forme un triangle avec au moins une ponction. L'algèbre jacobienne Γ_σ^p admet pour potentiel $\mathcal{W}_\sigma = \sum \Delta_i - \sum \Delta_{P_i} - \sum \Delta_{k_i}$. Mais puisque chaque terme $x_i y_i$ représente un cycle externe Δ_{P_i} autour du sommet P_i et que tous les cycles externes consécutifs $\Delta_{P_i}, \Delta_{P_{i+1}}$ sont adjacents à un même cycle interne Δ_i lequel appartient au triangle formé par une ponction et les sommets P_i et P_{i+1} , alors les dérivations cycliques autour de ces cycles consécutifs $\Delta_{P_i}, \Delta_{P_{i+1}}$ combinée à celle sur Δ_i permettent d'établir que $x_i y_i = x_{i+1} y_{i+1}$, dans l'algèbre $e_{\mathcal{F}} \Gamma_\sigma^p e_{\mathcal{F}}$. D'autre part, soit a et b des chemins dans $(P_{n+1,p-1})$ comme montrés dans la figure 3.8 et notons $(-)^{4,1}, (-)^{n+1,p-1}$ les variables appartenant uniquement aux polygones $(P_{4,1})$ et $(P_{n+1,p-1})$ respectivement. Posons $x_1^{n+1,p-1} = a, y_1^{n+1,p-1} = u_1 v_1 y_1, x_{n+1}^{n+1,p-1} = b, y_{n+1}^{n+1,p-1} = y_{n+1} u_{n+1} v_{n+1}$. L'hypothèse de récurrence appliquée à $(P_{n+1,p-1})$ donne $x^2 = x^{p-1} y^{(n-1)+(p-1)} = x^{p-1} \cdot y^{p-1} \cdot y^{n-1}$ dans $e' \Gamma_{\sigma'}^{p-1} e'$. Plus précisément, en considérant les indices à modulo $(n-1)$ -près, il s'en-

suit que

$$x_i x_{i-1} = x_i x_{i-1} \dots x_{[i-(p-1)+1]} \cdot y_{[i-(p-1)+1]} y_{[i-(p-2)+1]} \dots y_i \cdot y_{i+1} \dots y_{[i+(n-1)]} \quad (3.2.22)$$

$$= \prod_{k=1}^{p-1} x_{[i-k+1]} \cdot \prod_{k=1}^{p-1} y_{[i-(p-k)+1]} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} y_{i+k}. \quad (3.2.23)$$

pour tout $1 \leq i \leq n-1$. Dans le cas où $i \neq \{2, 1, n+1\}$, alors deux situations se présentent :

- soit le chemin $\prod_{k=1}^{p-1} x_{[i-k+1]}$ ne passe pas par $x_1^{n+1,p-1}$ et $x_{n+1}^{n+1,p-1}$, alors seul le chemin $\prod_{k=1}^{n-1} y_{i+k}$ passe par $y_{n+1}^{n+1,p-1}$ et $y_1^{n+1,p-1}$. Le théorème précédent appliqué au polygone $(P_{4,1})$ donne $(x_{n+1}^{4,1} x_1^{4,1}) = (x_{n+1}^{4,1} b) y_{n+1} y_{n+2} y_{n+3} = x_{n+1} y_{n+1} y_{n+2} y_{n+3}$. Mais puisque $(y_{n+1}^{n+1,p-1} y_1^{n+1,p-1}) = y_{n+1} (x_{n+1}^{4,1} x_1^{4,1}) y_1 = y_{n+1} (x_{n+1} y_{n+1} y_{n+2} y_{n+3}) y_1$, donc le chemin $\prod_{k=1}^{n-1} y_{i+k}$ se traduit dans $e_{\mathcal{F}} \Gamma_{\sigma}^p e_{\mathcal{F}}$ par $y_{i+1} \dots (y_{n+1} (x_{n+1} y_{n+1} y_{n+2} y_{n+3}) y_1) \dots y_{[i+(n-1)]}$ et l'équation 3.2.23 devient alors

$$x_i x_{i-1} = \prod_{k=1}^{p-1} x_{[i-k+1]} \cdot \prod_{k=1}^{p-1} y_{[i-(p-k)+1]} \cdot y_{i+1} \dots (y_{n+1} (x_{n+1} y_{n+1} y_{n+2} y_{n+3}) y_1) \dots y_{[i+(n-1)]}. \quad (3.2.24)$$

Le nombre de termes en x dans l'algèbre $e \Gamma_{\sigma}^p e$ devient alors $(p-1)+$ le terme en x_{n+1} et celui en y devient $[(p-1) + (n-1)]+$ les termes en $y_{n+1}, y_{n+2}, y_{n+3}$ alors, en utilisant la commutativité, il s'ensuit que $x^2 = x^p y^{n+1+p}$ dans l'algèbre $e_{\mathcal{F}} \Gamma_{\sigma}^p e_{\mathcal{F}}$;

- soit $\prod_{k=1}^{p-1} x_{[i-k+1]}$ passe par $x_1^{n+1,p-1}, x_{n+1}^{n+1,p-1}$ alors les chemins $\prod_{k=1}^{p-1} y_{[i-(p-k)+1]}$, $\prod_{k=1}^{n-1} y_{i+k}$ passent chacun par $y_{n+1}^{n+1,p-1}, y_1^{n+1,p-1}$. Ainsi, on obtient que

$$\prod_{k=1}^{p-1} x_{[i-k+1]} = x_i x_{i-1} \dots x_2 (x_1^{n+1,p-1} x_{n+1}^{n+1,p-1}) \dots x_{[i-(p-1)+1]},$$

$$\prod_{k=1}^{p-1} y_{[i-(p-k)+1]} = y_{[i-(p-1)+1]} \dots (y_{n+1}^{n+1,p-1} y_1^{n+1,p-1}) y_2 \dots y_i.$$

En composant ce chemin $[(x_1^{n+1,p-1} x_{n+1}^{n+1,p-1}) \dots x_{[i-(p-1)+1]}]$ de longueur $(p-i)$ de l'équation 3.2.6 avec ce chemin $[y_{[i-(p-1)+1]} \dots (y_{n+1}^{n+1,p-1} y_1^{n+1,p-1})]$ de même longueur de l'équation 3.2.25 et en utilisant la commutativité dans $e' \Gamma_{\sigma'} e'$, il s'ensuit que

$$\prod_{k=1}^{p-1} x_{[i-k+1]} \cdot \prod_{k=1}^{p-1} y_{[i-(p-k)+1]} = x_i x_{i-1} \dots x_2 (y_2 x_2)^{p-i} y_2 \dots y_i \quad (3.2.25)$$

$$= \prod_{k=1}^{i-1} x_{[i-k+1]} (y_2 x_2)^{p-i} \prod_{k=p-i+1}^{p-1} y_{[i-(p-k)+1]}. \quad (3.2.26)$$

Mais comme le chemin $\prod_{k=1}^{n-1} y_{[i+k]} = y_{i+1} \dots (y_{n+1} (x_{n+1} y_{n+1} y_{n+2} y_{n+3}) y_1) \dots y_{[i+(n-1)]}$, donc l'équation 3.2.23 devient finalement

$$x_i x_{i-1} = \prod_{k=1}^{i-1} x_{[i-k+1]} (y_2 x_2)^{p-i} \prod_{k=p-i+1}^{p-1} y_{[i-(p-k)+1]} \cdot y_{i+1} \dots (y_{n+1} (x_{n+1} y_{n+1} y_{n+2} y_{n+3}) y_1) \dots y_{[i+(n-1)]}. \quad (3.2.27)$$

Ainsi on obtient de nouveaux termes en les variables $x_{n+1}, y_{n+1}, y_{n+2}$ et y_{n+3} , d'où l'équation $x^2 = x^p y^{n+1+p}$, dans l'algèbre $e_{\mathcal{F}} \Gamma_{\sigma}^p e_{\mathcal{F}}$.

D'autre part si $i \in \{2, 1, n+1\}$, alors trois situations se présentent :

- pour $i = 2$, les chemins $\prod_{k=1}^{p-1} x_{[i-k+1]}$, $\prod_{k=1}^{p-1} y_{[i-(p-k)+1]}$ passent par $x_1^{n+1, p-1}$, $x_{n+1}^{n+1, p-1}$ et $y_{n+1}^{n+1, p-1}$, $y_1^{n+1, p-1}$ respectivement tandis que le chemin $\prod_{k=1}^{n-1} y_{i+k}$ se termine par $y_{n+1}^{n+1, p-1} = y_{n+1} x_{n+1}^{n+1, p-1}$. Ainsi, en multipliant à droite de $x_1^{n+1, p-1}$ et $y_{n+1}^{n+1, p-1}$ par $x_1^{4,1}$ et en utilisant le théorème précédent appliqué au polygone $(P_{4,1})$, il s'ensuit que $\prod_{k=1}^{n-1} y_{[i+k]} = \prod_{k=1}^{n-2} y_{[i+k]} \cdot y_{n+1} (x_{n+1} y_{n+1} y_{n+2} y_{n+3})$. Par conséquent, en utilisant l'équation 3.2.26, celle de 3.2.23 se traduit alors dans l'algèbre $e \Gamma_{\sigma}^p e$ par

$$\begin{aligned} x_2 x_1 &= (x_2 x_1^{n+1, p-1}) \cdot x_1^{4,1} \\ &= \prod_{k=1}^{i-1} x_{[i-k+1]} (y_2 x_2)^{p-i} \prod_{k=p-i+1}^{p-1} y_{[i-(p-k)+1]} \cdot \prod_{k=1}^{n-2} y_{[i+k]} \cdot y_{n+1} (x_{n+1} y_{n+1} y_{n+2} y_{n+3}); \end{aligned}$$

- pour $i = n+1$, le chemin $\prod_{k=1}^{p-1} x_{[i-k+1]}$ admet $y_{n+1}^{n+1, p-1}$ comme dernier terme tandis que $\prod_{k=1}^{n-1} y_{i+k}$ admet $y_1^{n+1, p-1}$ comme premier terme. Dans $e' \Gamma_{\sigma'}^{p-1} e'$, on a $\prod_{k=1}^{p-1} x_{[i-k+1]} = x_{n+1}^{n+1, p-1} \cdot \prod_{k=2}^{p-1} x_{[i-k+1]}$. Donc en multipliant à gauche de $x_{n+1}^{n+1, p-1}$

par $x_{n+1}^{4,1}$ et en utilisant l'égalité $(x_{n+1}^{4,1} \cdot x_{n+1}^{n+1,p-1}) = x_{n+1}$, l'équation 3.2.23 se traduit dans $e_{\mathcal{F}} \Gamma_{\sigma}^p e_{\mathcal{F}}$ par

$$x_{n+1} x_n = x_{n+1}^{4,1} \cdot (x_{n+1}^{n+1,p-1} x_n) \quad (3.2.28)$$

$$= \prod_{k=1}^{p-1} x_{[i-k+1]} \cdot \prod_{k=1}^{p-2} y_{[i-(p-k)+1]} (y_{n+1}^{n+1,p-1} \cdot y_1^{n+1,p-1}) \prod_{k=2}^{n-1} y_{i+k} \quad (3.2.29)$$

$$= \prod_{k=1}^{p-1} x_{[i-k+1]} \cdot \prod_{k=1}^{p-2} y_{[i-(p-k)+1]} (y_{n+1} (x_{n+1} y_{n+1} y_{n+2} y_{n+3}) y_1) \prod_{k=2}^{n-1} y_{i+k}; \quad (3.2.30)$$

- Enfin, le cas $i = 1$ permet de montrer facilement dans l'algèbre $e_{\mathcal{F}} \Gamma_{\sigma} e_{\mathcal{F}}$ que

$$x_1 x_{n+3} = x_1 y_1 \left(\prod_{k=1}^{p-1} x_{[i-k+1]} \cdot \prod_{k=1}^{p-1} y_{[i-(p-k)+1]} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} y_{i+k} \right) y_{n+1} y_{n+2}.$$

En effet, on a $x_1 x_{n+3} = x_1^{n+1,p-1} (x_1^{4,1} \cdot x_{n+3}) = (x_1^{n+1,p-1} \cdot x_1^{4,1}) y_1^{4,1} y_{n+1}^{4,1} y_{n+2} = x_1 y_1 (ab) y_{n+1} y_{n+2}$, où ab est donné par l'équation 3.2.23.

De même, on montre dans l'algèbre $e_{\mathcal{F}} \Gamma_{\sigma} e_{\mathcal{F}}$ que

$$x_{n+2} x_{n+1} = x_{n+2} y_{n+2} y_{n+3} y_1 \left(\prod_{k=1}^{p-1} x_{[i-k+1]} \cdot \prod_{k=1}^{p-1} y_{[i-(p-k)+1]} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} y_{i+k} \right).$$

Nous terminons cette thèse par le quatrième chapitre qui suit. Celui-ci est une application des différentes notions présentées dans les chapitres 1, 2 et 3.

Chapitre 4

Applications

Soit $p \in \{0, 1\}$ fixé. Posons R_p l'anneau quotient $k[[x, y]]/x^2 = x^p y^{n+1+p}$ et $A^p = e_{\mathcal{F}} I_{\sigma}^p e_{\mathcal{F}}$ l'algèbre jacobienne gelée de bords associée à $(P_{n+3,p})$. Nous rappelons que les algèbres R_0 et R_1 sont 1-Gorenstein. De plus elles sont des singularités de Klein au sens d'Arnold de type \mathbb{A}_n et \mathbb{A}_{2n+3} , respectivement. Donc elles sont simples et isolées, c'est-à-dire, de représentation finie [Her78] et admettent des suites presque scindées, voir [GT87, Théorème 5.2.] ou [Aus86a], lesquelles induisent des suites presque scindées dans $R_p * G_{n+3}$. Dans ce chapitre, nous utilisons les CM-modules et l'action du groupe cyclique G_{n+3} , défini au chapitre 3, sur R_0 et R_1 pour procéder à la catégorification des algèbres amassées de type \mathbb{A}_n et \mathbb{D}_{n+3} . Plus précisément, nous donnons au théorème 4.3.4 une classification complète de toutes les isoclasses de $(R_p * G_{n+3})$ -modules de Cohen-Macaulay indécomposables et construisons une bijection entre l'ensemble de ces isoclasses et l'ensemble de tous les côtés et diagonales des polygones $(P_{n+3,p})$. Ensuite, nous déterminons ces suites presque scindées dans $R_p * G_{n+3}$ et montrons que leurs morphismes irréductibles correspondent aux mouvements élémentaires des diagonales de $(P_{n+3,p})$ dans le sens horaire. Enfin, nous montrons au théorème 4.2.2 que les catégories stables $\underline{\text{CM}}(R_p * G_{n+3})$ sont équivalentes en tant que catégories triangulées aux catégories amassées de type \mathbb{A}_n et \mathbb{D}_{n+3} , respectivement. Pour cela nous proposons deux approches différentes : la première s'inspire partiellement de Demonet-Luo et utilise le résultat de Keller-Reiten [KR08, Théorème 2.1.] tandis que la

deuxième utilise certains résultats de Yoshino [Yos90] pour donner une description linéaire algébrique des arcs étiquetés en terme de modules de Cohen-Macaulay (théorème 4.1.2) et mouvements élémentaires (proposition 4.3.1) décrits par Schiffler [Sch08] dans $(P_{n+3,1})$.

I) Cas du polygone sans ponction $(P_{n+3,0})$

4.1 Modules de Cohen-Macaulay sur Λ^0

Dans le chapitre 2 nous avons établi au lemme 2.1.1 que les CM-modules sur une k -algèbre 1-Gorenstein coïncident avec les sous-modules de modules projectifs. Dans le théorème 4.1.1 qui suit, nous utilisons cette caractérisation pour donner une liste complète de toutes les isoclasses de $\text{CM}(R_0 * G_{n+3})$ -modules indécomposables. Ce résultat étend la description des isoclasses de R_0 -modules de Cohen-Macaulay indécomposables faite par Yoshino sur l'algèbre $R_0 * G_{n+3}$, voir [Yos90, Proposition 5.11.].

Soit $\lceil x \rceil$ la partie entière par excès d'un nombre x . On a $\lceil \frac{n}{2} \rceil = \frac{n}{2}$, si n pair, et $\lceil \frac{n}{2} \rceil = \frac{n+1}{2}$ sinon.

Théorème 4.1.1 *Soit l'hypersurface $R_0 = k[[x, y]]/\langle f \rangle$ une k -algèbre, où $f = x^2 + y^{n+1}$.*

Posons

$$G = G_{n+3} = \{g = \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix} \mid \zeta = e^{i \frac{2k\pi}{n+3}}, \text{ où } k = 1, 2, \dots, n+3\}.$$

L'ensemble

$$E_1 = \{ {}^{g_i} M_j = \langle x_i, \prod_{k=1}^j y_{i+k} \rangle : 0 \leq j \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil; 1 \leq i \leq |G| \},$$

*tel que ${}^{g_i} M_j \cong {}^{g_{i+j+1}} M_{n+1-j}$ forme une liste complète de tous les $(R_0 * G_{n+3})$ -modules de Cohen-Macaulay à isomorphisme près.*

Démonstration 4.1.1 *Soit P_i un Λ^0 -module projectif indécomposable. La décomposition de l'identité de l'algèbre $R_0 * G_{n+3}$ en les idempotents e_i donne $P_i = \langle e_{i+1} \rangle \cong \langle x_i, e_{i+1} \rangle$, pour tout $1 \leq i \leq n+3$, i modulo $n+3$. Le carquois associé à l'algèbre $R_0 * G_{n+3}$, donné à la figure 3.6, affirme que la table multiplicative des P_i se présente comme dans la figure 4.1.*

Tout $(R_0 * G_{n+3})$ -sous-module propre de module projectif indécomposable est donc de la

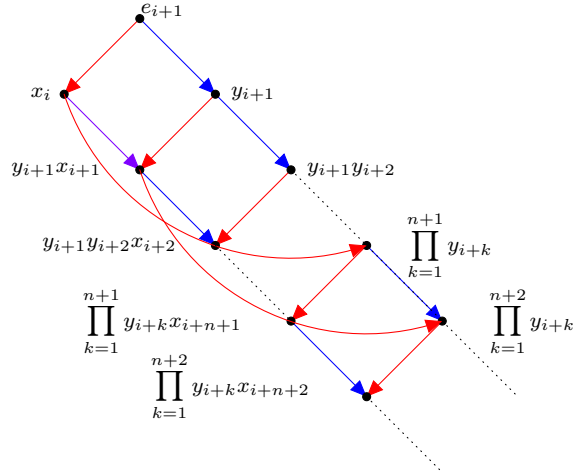


FIGURE 4.1 – Structure des Λ -modules projectifs indécomposables.

forme ${}^i M_j = \langle x_i, \prod_{k=1}^j y_{i+k} \rangle$, pour tout $1 \leq i \leq n+3$ et $1 \leq j$ comme représenté à la figure 4.2. L'indécomposabilité découle du fait que le R_0 -module de Cohen-Macaulay M_j

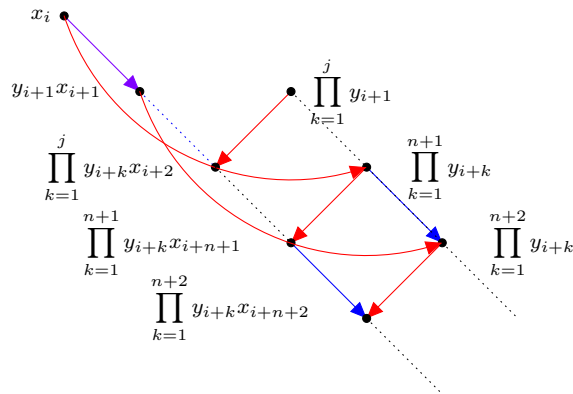


FIGURE 4.2 – Structure des modules indécomposables ${}^i M_j$.

correspondant à la factorisation de matrice (φ_j, φ_j) , pour tout $0 \leq j \leq n+1$, est aussi indécomposable, voir [Yos90], où

$$\varphi_j = \begin{pmatrix} x & y^j \\ y^{n+1-j} & -x \end{pmatrix} \quad (4.1.1)$$

Mais comme $R_0 * G_{n+3}$ est 1-Gorenstein, car R_0 l'est, alors le lemme 2.1.1 affirme que tous les $(R_0 * G_{n+3})$ -modules de Cohen-Macaulay indécomposables projectifs sont de cette forme, pour tout $1 \leq i \leq n+3$ et $j \geq 1$. La relation $x_i x_{i-1} = \prod_{k=1}^{n+1} y_{i+k}$ entraîne que l'idéal

$\langle x_i, \prod_{k=1}^{n+1} y_{i+k} \rangle = \langle x_i, x_i x_{i-1} \rangle = x_i \langle x_{i-1}, e_i \rangle \cong \langle e_i \rangle = P_{i-1}$. On note alors $P_i = {}^{g_i}M_0$, pour tout $1 \leq i \leq n+3$ et $j = 0$, où le produit $\prod_{k=1}^j y_{i+k}$, pour $j = 0$, correspond à l'idempotent e_{i+1} du côté $i+1$. Plus généralement, on a l'isomorphisme de $(R_0 * G_{n+3})$ -modules de Cohen-Macaulay ${}^{g_i}M_j \xrightarrow{(\star)} {}^{g_{i+j+1}}M_{n+1-j}$ défini par le morphisme de $(R_0 * G_{n+3})$ -modules $\mu : (x_i a + \prod_{k=1}^j y_{i+k} b) \mapsto (-x_{i+j+1} b + \prod_{k=1}^{n+1-j} y_{i+j+1+k} a)$, induit, par passage au conoyau, par l'isomorphisme de factorisations de matrices $(\alpha, \beta) : (\varphi_j, \varphi_j) \longrightarrow (\varphi_{n+1-j}, \varphi_{n+1-j})$, où $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, d'inverse $\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\beta^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Par conséquent, si n est pair, alors j varie entre 0 et $\frac{n}{2}$, à isomorphisme près. Par contre, si n est impair, alors j varie entre 0 et $\frac{[(i+n+1)-(i+1)+1]}{2}$, c'est-à-dire $0 \leq j \leq \frac{n+1}{2}$, à isomorphisme près.

Remarque 4.1.1 On note que si n est pair, alors $0 \leq ij \leq \frac{n(n+3)}{2}$, ce qui fait exactement $\frac{n(n+3)}{2}$ isoclasses de modules de Cohen-Macaulay non projectifs indécomposables. Inversement, si n est impair, alors, pour $0 \leq j \leq \frac{(n-1)}{2}$, l'isomorphisme (\star) fournit $\frac{(n+3)(n-1)}{2}$ modules de Cohen-Macaulay non projectifs indécomposables à isomorphisme près. Mais comme $n+1-j = j$, pour $j = \frac{n+1}{2}$, c'est-à-dire, ${}^{g_i}M_{\frac{n+1}{2}} \cong {}^{g_{i+\frac{n+3}{2}}}M_{\frac{n+1}{2}}$, pour tout $1 \leq i \leq n+3$, donc (\star) fournit de plus exactement $\frac{n+3}{2}$ modules de Cohen-Macaulay non projectifs indécomposables à isomorphisme près. Ce qui donne en tout exactement $\frac{(n+3)(n-1)}{2} + \frac{(n+3)}{2} = \frac{n(n+3)}{2}$ isoclasses de modules de Cohen-Macaulay indécomposables non projectifs.

Soit \mathcal{J}_0 l'ensemble des isoclasses de $(R_0 * G_{n+3})$ -modules de Cohen-Macaulay indécomposables et \mathcal{I} l'ensemble de tous les côtés et arcs de $(P_{n+3,0})$. Notons par $\delta_{i,i'}$, le chemin de bord $P_i P_{i+1} \dots P_{i'}$, pour tout $1 \leq i < i' \leq n+3$ modulo $(n+3)$, orienté dans le sens anti-horaire, de source P_i et de but $P_{i'}$ comme défini dans [Sch08] et, soit $d_{i,i'}$ un chemin dans l'intérieur de $(P_{n+3,0})$ de source P_i et de but $P_{i'}$ homotope à $\delta_{i,i'}$. La définition qui suit est une version adaptée de 1.2.2 appliquée au polygone $(P_{n+3,0})$.

Définition 4.1.1 *Un chemin $d_{i,i'}$ dans l'intérieur de $(P_{n+3,0})$ est un arc simple s'il divise $(P_{n+3,0})$ en deux $(2+m)$ -gones et $(n+3-m)$ -gones pour tout $1 \leq m \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.*

Le lemme 4.1.1 qui suit montre que les $(R_0 * G_{n+3})$ -modules de Cohen-Macaulay ne dépendent que des éléments de \mathcal{I} . Ce lemme donne une interprétation naturelle de l'indexation habituelle des arcs et côtés de $(P_{n+3,0})$ par les isoclasses de CM-modules indécomposables.

Lemme 4.1.1 *Il existe une correspondance bijective entre \mathcal{I}_0 et \mathcal{J}_0 définie comme suit*

$$\begin{aligned} \delta : \quad \mathcal{I}_0 &\longrightarrow \mathcal{J}_0 \\ d_{i,(i+1)+j} &\longmapsto {}^g M_j \end{aligned}, \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n+3 \text{ et } 0 \leq j \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil.$$

Démonstration 4.1.2 *Les côtés du polygone $(P_{n+3,0})$ étant indexés par $i+1 = (P_i, P_{i+1})$, pour tout $1 \leq i \leq n+3$, et $1 = (P_{n+3}, P_1)$, on a alors $d_{i,i+1} = (P_i, P_{i+1})$. Mais comme, pour $j = 0$, on a ${}^g M_0 = \langle x_i, e_{i+1} \rangle$, pour tout $1 \leq i \leq n+3$, il suit que les côtés de $(P_{n+3,0})$ correspondent bijectivement aux $R_0 * G$ -modules de Cohen-Macaulay projectifs indécomposables. Soit maintenant k et k' les nombres de sommets, exceptés P_i et $P_{i'}$, par lesquels passent $\delta_{i,i'}$ et $\delta_{i',i}$, respectivement. Alors on a $k + k' = n+1$. Posons $|\delta_{i,i'}|$ ce nombre incluant P_i et $P_{i'}$. Alors, on a $|\delta_{i,i'}| = k+2$, avec $1 \leq k \leq n$. Autrement dit $i' = (i+1) + k$, c'est-à-dire, $d_{i,i'} = d_{i,(i+1)+k}$, pour tout $1 \leq i \leq n+3$ et $1 \leq k \leq n$. Mais puisque les arcs $d_{i,i'}$ et $d_{i',i}$ sont homotopes, alors, si n est pair, on choisit $j = \min\{k, k'\}$. Par conséquent, il suit $1 \leq j \leq \frac{n}{2}$, c'est-à-dire, $d_{i,i'} = d_{i,(i+1)+j}$, pour tout $1 \leq i \leq n+3$ et $1 \leq j \leq \frac{n}{2}$. De même, dans le cas impair, on a $d_{i,i'} = d_{i,(i+1)+j}$, pour tout $1 \leq i \leq n+3$ et $1 \leq j \leq \frac{n-1}{2}$. Et, pour $j = \frac{n+1}{2}$, on a $k = k'$, c'est-à-dire, $d_{i,i'} = d_{i',i}$, pour tout*

$1 \leq i \leq n+3$, ce qui fournit $\frac{n+3}{2}$ autres arcs supplémentaires de même nombre de sommets k par lesquels passent $\delta_{i,i'}$ et $\delta_{i',i}$. Ainsi le nombre total exact d'arcs simples $(P_{n+3,0})$ dans devient alors $(n+3)\frac{n-1}{2} + \frac{n+3}{2} = \frac{n(n+3)}{2}$.

Les arcs simples $d_{i,i'}$ définis dans $(P_{n+3,0})$ sont des diagonales. Ces diagonales le partagent en des triangles. Soit σ une triangulation quelconque de $(P_{n+3,0})$. On note $e_{(i+1,j)}$ l'idempotent associé à la diagonale $d_{i,(i+1,j)}$.

Nous reformulons l'indexation δ en terme d'algèbre jacobienne gelée comme suit.

Théorème 4.1.2 *Pour toute diagonale $d_{i,(i+1,j)}$ de σ , il existe un isomorphisme de $(R_0 * G_{n+3})$ -modules*

$$e_{(i+1,j)}\Gamma_\sigma e_{\mathcal{F}} \cong \langle x_i, \prod_{k=1}^j y_{i+k} \rangle \quad (4.1.2)$$

Par conséquent, l'application δ devient, en terme d'algèbre jacobienne gelée, l'application $\delta|_\sigma$ définie comme suit

$$\begin{aligned} \delta|_\sigma : \quad \sigma &\longrightarrow \mathcal{J}_0 \\ d_{i,(i+1)+j} &\longmapsto e_{(i+1,j)}\Gamma_\sigma e_{\mathcal{F}} \end{aligned}, \text{ pour un certain } 1 \leq i \leq n+3 \text{ et } 1 \leq j \leq n \quad (4.1.3)$$

tels que $\#(i+1, j) = n$

Démonstration 4.1.3 On a $\Lambda^0 = e_{\mathcal{F}}\Gamma_\sigma^0 e_{\mathcal{F}}$. Mais comme Λ^0 est isomorphe à l'algèbre de groupe gauche $R_0 * G = \bigoplus_{i \in \mathcal{F}} P_i = \bigoplus_{i \in \mathcal{F}} \langle x_i, e_{i+1} \rangle$, alors il s'ensuit $e_{\mathcal{F}}\Gamma_\sigma^0 e_{\mathcal{F}} \cong \bigoplus_{i \in \mathcal{F}} \langle x_i, e_{i+1} \rangle$. Ainsi, on obtient

$$e_{i+1}(e_{\mathcal{F}}\Gamma_\sigma^0 e_{\mathcal{F}}) \cong e_{i+1}(\bigoplus_{i \in \mathcal{F}} \langle x_i, e_{i+1} \rangle), \quad (4.1.4)$$

$$e_{i+1}\Gamma_\sigma^0 e_{\mathcal{F}} \cong \langle x_i, e_{i+1} \rangle, \quad (4.1.5)$$

$$e_{(i+1,0)}\Gamma_\sigma^0 e_{\mathcal{F}} \cong \langle x_i, \prod_{k=1}^j y_{i+k} \rangle, \text{ pour } j = 0, \quad (4.1.6)$$

où $e_{(i+1,0)}$ est l'idempotent du côté $d_{i,i+1}$ renuméroté par $(P_i, P_{i+1}) = (i+1, 0)$, pour tout $1 \leq i \leq n+2$, et par $(P_{n+3}, P_1) = (1, 0)$. Puisque chaque diagonale $d_{i,i+1+j}$ est paramétré par sa source matérialisée par $e_{i+1}X_i$ et le nombre de sommets (exceptés ses extrémités) que traverse son chemin de bords, donné par le produit $\prod_{k=1}^j y_{i+k}$, donc on pose $e_{i+1,j} = e_{i+1} + \prod_{k=1}^j y_{i+k}$, pour tout $j \neq 0$. Il suffit de vérifier que $e_{i+1,j}$ est bien un idempotent associé à $d_{i,i+1+j}$.

Définition 4.1.2 [CCS06] Un **mouvement élémentaire** d'une diagonale $d_{i,(i+1)+j}$ dans l'intérieur de $(P_{n+3,0})$ dans le sens horaire est une paire ordonnée $(d_{i,(i+1)+j}, d_{i',(i'+1)+j'})$ de diagonales définie comme suit :

- si $j = 1$, alors il existe précisément un mouvement élémentaire dans le sens horaire défini par $d_{i,(i+1)+j} \mapsto d_{i-1,(i+1)+j}$
- si $2 \leq j \leq n$, alors il existe exactement deux mouvements élémentaires dans le sens horaire, à savoir $d_{i,(i+1)+j} \mapsto d_{i-1,(i+1)+j}$ et $d_{i,(i+1)+j} \mapsto d_{i,i+j}$.

Exemple 4.1.1 La figure 4.3 qui suit illustre les deux mouvements élémentaires possibles dans le sens horaire d'une diagonale $d_{i,(i+1)+j}$ dans l'intérieur du polygone $(P_{n+3,0})$.

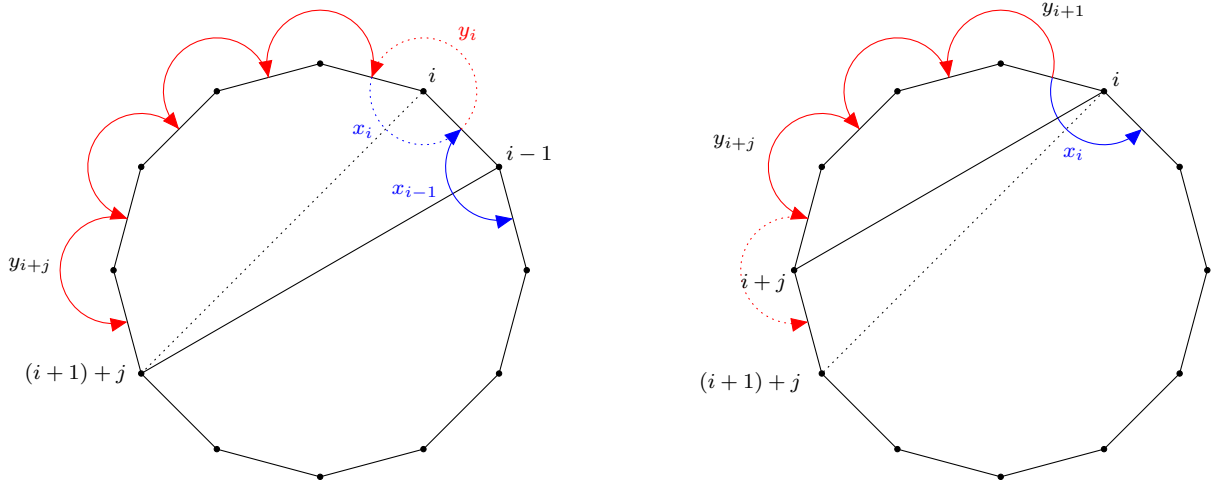


FIGURE 4.3 – Mouvements élémentaires dans le sens horaire

Le dessin de gauche traduit, d'une part, le mouvement élémentaire de la diagonale $d_{i,(i+1)+j}$ en la diagonale $d_{(i-1),(i+1)+j}$ en décalant dans le sens horaire la flèche x_i du sommet P_i au sommet P_{i-1} pour la remplacer par la flèche x_{i-1} et en ajoutant dans le sens anti-horaire une nouvelle flèche externe y_i autour du sommet P_i . Nous interprétons cet ajout combiné au décalage comme une multiplication à gauche par y_i du $(R_0 * G_{n+3})$ -module de Cohen-Macaulay $\langle x_i, \prod_{k=1}^j y_{i+k} \rangle$ correspondant à la dite diagonale, ce qui induit le morphisme irréductible $0 \longrightarrow \langle x_i, \prod_{k=1}^j y_{i+k} \rangle \longrightarrow \langle x_{i-1}, \prod_{k=1}^{j+1} y_{(i-1)+k} \rangle$ de $(R_0 * G_{n+3})$ -modules de Cohen-Macaulay. D'autre part, celui de droite décrit le mouvement élémentaire de la diagonale $d_{i,(i+1)+j}$ en la diagonale $d_{i,i+j}$ en supprimant tout simplement la dernière flèche y_{i+j} de but $e_{(i+1)+j}$. Cette transformation peut aussi s'interpréter dans $\text{CM}(R_0 * G_{n+3})$ comme une inclusion de $\langle x_i, \prod_{k=1}^j y_{i+k} \rangle$ dans $\langle x_i, \prod_{k=1}^{j-1} y_{i+k} \rangle$, ce qui donne le morphisme irréductible de $(R_0 * G_{n+3})$ -modules de Cohen-Macaulay $0 \longrightarrow \langle x_i, \prod_{k=1}^j y_{i+k} \rangle \longrightarrow \langle x_i, \prod_{k=1}^{j-1} y_{i+k} \rangle$. Plus précisément on a la proposition suivante.

Proposition 4.1.1 *La catégorie $\text{CM}(R_0 * G_{n+3})$ admet, suivant la parité de n , des suites presque scindées de la forme*

$$0 \longrightarrow {}^{g_i}M_j \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha_j \\ \alpha'_j \end{pmatrix}} {}^{g_i}M_{j-1} \oplus {}^{g_{i-1}}M_{j+1} \xrightarrow{(\beta'_j \ \beta'_j)} {}^{g_{i-1}}M_j \longrightarrow 0, \quad (4.1.7)$$

pour tout $1 \leq i \leq n+3$ et $1 \leq j \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$, où ${}^{g_i}M_j$ est l'idéal de $R_0 * G_{n+3}$ dont les éléments générateurs sont x_i et $\prod_{k=1}^j y_{i+k}$ comme défini ci-haut, et les morphismes sont définis

comme suit

$$\alpha_j(x_i a + \prod_{k=1}^j y_{i+k} b) = (x_i a + \prod_{k=1}^j y_{i+k} b) \quad (4.1.8)$$

$$\alpha'_j(x_i a + \prod_{k=1}^j y_{i+k} b) = y_i(x_i a + \prod_{k=1}^j y_{i+k} b) \quad (4.1.9)$$

$$\beta_j(x_i a + \prod_{k=1}^{j-1} y_{i+k} b) = y_i(x_i a + \prod_{k=1}^{j-1} y_{i+k} b) \quad (4.1.10)$$

$$\beta'_j(x_{i-1} a + \prod_{k=1}^{j+1} y_{i-1+k} b) = -(x_{i-1} a + \prod_{k=1}^{j+1} y_{i-1+k} b). \quad (4.1.11)$$

Démonstration 4.1.4 Soit M_j le R_0 -module de Cohen-Macaulay correspondant à la factorisation de matrice (φ_j, φ_j) , pour tout $0 \leq j \leq n+1$, où φ_j est comme dans l'égalité 4.1.1. D'une part, le théorème d'Auslander 2.2.1 appliqué à l'anneau R_0 donne $\tau M_j = M_j$. La suite courte exacte correspondant au socle du k -module $\text{Ext}_{R_0}^1(M_j, \tau M_j)$

est donc donnée par l'extension $(\Phi_j, \Phi_j) := \begin{pmatrix} \varphi_j & \varepsilon_j \\ 0 & \varphi_j \end{pmatrix}$, avec $\varepsilon_j = \begin{pmatrix} 0 & y^{j-1} \\ -y^{n-j} & 0 \end{pmatrix}$, pour tout $1 \leq j \leq n$, voir [Yos90, Page 76]. D'autre part, l'isomorphisme de factorisations de matrices $(\Phi_j, \Phi_j) \cong (\varphi_{j-1}, \varphi_{j-1}) \oplus (\varphi_{j+1}, \varphi_{j+1})$, défini par le morphisme

$$(\lambda, \lambda), \text{ où } \lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & y & 0 & 1+y \\ y & 0 & y-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ d'inverse } \lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 1-y & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1+y \\ y & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -y \end{pmatrix}, \text{ induit}$$

dans $\underline{\text{CM}}(R_0)$, par passage au conoyau, l'isomorphisme de modules de Cohen-Macaulay

$$\text{cok}(\lambda, \lambda) = \gamma : E_j \longrightarrow M_{j-1} \oplus M_{j+1}, \text{ avec } \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & y-1 \end{pmatrix}, \text{ d'inverse } \gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 1-y & 1 \\ y & -1 \end{pmatrix},$$

où $E_j = \text{Coker}(\Phi_j)$, et $M_{j-1} \oplus M_{j+1} = \text{Coker}\left(\begin{pmatrix} \varphi_{j-1} & 0 \\ 0 & \varphi_{j+1} \end{pmatrix}\right)$. Ainsi, on obtient dans

$\underline{\text{CM}}(R_0)$ la suite presque scindée

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & M_j & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \bar{\alpha} \\ \bar{\beta} \end{pmatrix}} & M_{j-1} \oplus M_{j+1} & \xrightarrow{(\bar{\alpha}' \ \bar{\beta}')} & M_j \longrightarrow 0, \\
 & & & \searrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \uparrow \gamma \quad \downarrow \gamma^{-1} & \nearrow (0 \ 1) & \\
 & & & & E_j & &
 \end{array}$$

pour tout $1 \leq j \leq \frac{n}{2}$ ou $1 \leq j \leq \frac{n+1}{2}$, où les morphismes $\begin{pmatrix} \bar{\alpha} \\ \bar{\beta} \end{pmatrix}$ et $(\bar{\beta} \ \bar{\beta}')$ sont définis par la commutativité du diagramme, c'est-à-dire, $\begin{pmatrix} \bar{\alpha} \\ \bar{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $(\bar{\beta} \ \bar{\beta}') = (y \ -1)$. Finalement, cette suite, appliquée au foncteur exact $F = R_0 * G_{n+3} \otimes_{R_0} -$, induit dans $\underline{\text{CM}}(R_0 * G_{n+3})$ la suite presque scindée

$$0 \longrightarrow {}^{g_i}M_j \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha_j \\ \alpha'_j \end{pmatrix}} {}^{g_i}M_{j-1} \oplus {}^{g_{i-1}}M_{j+1} \xrightarrow{(\beta_j \ \beta'_j)} {}^{g_{i-1}}M_j \longrightarrow 0,$$

où les morphismes $\begin{pmatrix} \alpha_j \\ \alpha'_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y_j \end{pmatrix}$ et $(\beta_j \ \beta'_j) = (y_j \ -1)$.

Soit $\Gamma(\Lambda^0)$ le carquois d'Auslander-Reiten de la catégorie stable des modules de Cohen-Macaulay $\underline{\text{CM}}(R_0 * G_{n+3})$. L'ensemble des sommets $(\Gamma(\Lambda^0))_0$ de $\Gamma(\Lambda^0)$ est formé par les $\underline{\text{CM}}(R_0 * G_{n+3})$ -modules de Cohen-Macaulay indécomposables non projectifs, à isomorphisme près, et l'ensemble de ses flèches $(\Gamma(\Lambda^0))_1$ est donné par les morphismes irréductibles correspondant aux mouvements élémentaires des diagonales $d_{i,(i+1)+j}$ dans $(P_{n+3,0})$. Soit l'application $\tau_1 : (\Gamma(\Lambda^0))_0 \rightarrow (\Gamma(\Lambda^0))_0$ définie par

$$\tau_1(\langle x_i, \prod_{k=1}^j y_{i+k} \rangle) = \langle x_{i+1}, \prod_{k=1}^j y_{i+1+k} \rangle, \text{ pour tout } 1 \leq j \leq n+1. \quad (4.1.12)$$

Le carquois $(\Gamma(\Lambda), \tau_1)$ de la figure 4.4 donne une description de la catégorie stable $\underline{\text{CM}}(R_0 * G_{n+3})$. On note que ce carquois est borné par l'ordre du groupe G_{n+3} et que sa forme ressemble à un ruban de Möbius. De plus, il est ici simplifié grâce à l'isomorphisme (\star) et est similaire au carquois d'Auslander-Reiten de la catégorie amassée de type \mathbb{A}_n . Le théorème 4.1.2 et celui dans la section qui suit, théorème 4.2.1, confirment bien cette similitude.

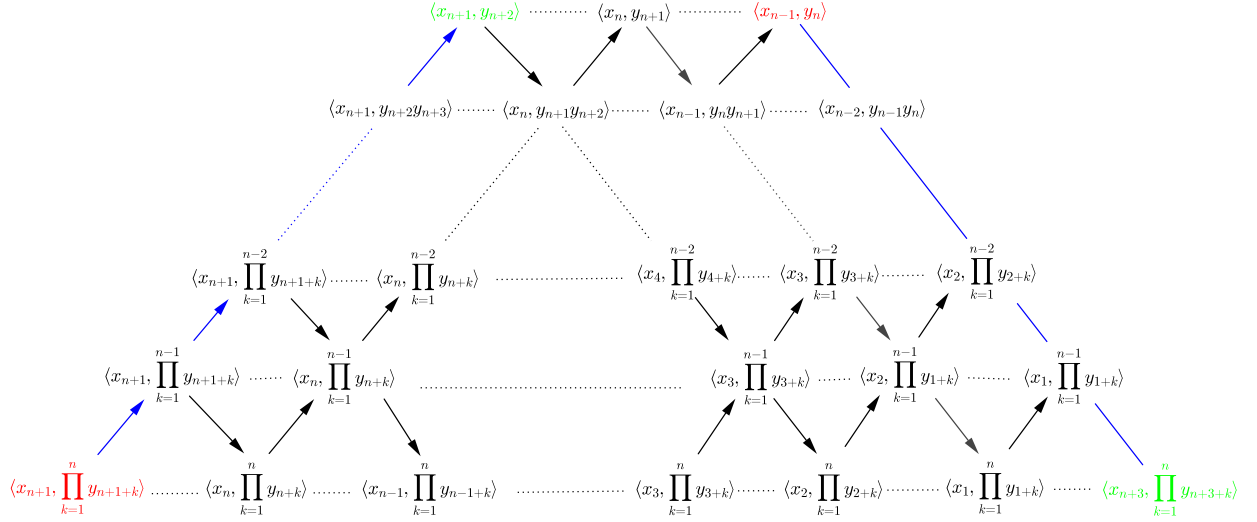


FIGURE 4.4 – Carquois de la catégorie stable $\underline{\text{CM}}(R_0 * G_{n+3})$.

4.2 Module inclinant amassé dans $\text{CM}(R_0 * G_{n+3})$

Nous montrons l'existence (et calculons) de modules *inclinants amassés* dans $\text{CM}(R_0 * G_{n+3})$ et montrons que ceux-ci correspondent bijectivement aux triangulations σ de $(P_{n+3,0})$. Ensuite, nous utilisons un résultat de Keller-Reiten [KR08, Théorème 2.1.] pour montrer une équivalence triangulée entre les catégories $\text{CM}(R_0 * G_{n+3})$ et $\mathcal{C}(\mathbb{A}_n)$. Ce résultat s'énonce comme suit : si k est un *corps parfait* et \mathcal{C} une *catégorie algébrique*, c'est-à-dire une catégorie stable d'une catégorie de Frobenius, triangulée 2-Calabi-Yau contenant un objet inclinant amassé T , avec $\text{End}_{\mathcal{C}}(T)$ isomorphe à l'algèbre héréditaire kQ , alors il existe une équivalence triangulée entre la catégorie \mathcal{C} et la catégorie amassée $\mathcal{C}(kQ)$.

Définition 4.2.1 Soit \mathcal{C} une catégorie triangulée où exacte. Un objet T dans \mathcal{C} est dit *inclinant amassé* si

$$\text{add}(T) = \{X \in \mathcal{C} \mid \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(T, X) = 0\} = \{X \in \mathcal{C} \mid \text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(X, T) = 0\},$$

où $\text{add}(T)$ est formé par des sommes directes finies de facteurs directs de T .

Dans la catégorie amassée $\mathcal{C}(\mathbb{A}_n)$, un module inclinant amassé s'interprète géométriquement comme une collection maximale d'arcs compatibles deux-à-deux de $(P_{n+3,0})$. La proposition qui suit donne une caractérisation de cette compatibilité.

Proposition 4.2.1 *Soit ${}^{g_i}M_j$ et ${}^{g_{i'}}M_{j'}$ deux $R_0 * G_{n+3}$ -modules de Cohen-Macaulay indécomposables. Alors, pour tous $1 \leq i \leq n+3$ et $1 \leq j \leq n+1$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) $\text{Ext}_{R_0 * G_{n+3}}^1({}^{g_i}M_j, {}^{g_{i'}}M_{j'}) \neq 0$
- (b) $\text{Ext}_{R_0 * G_{n+3}}^1({}^{g_{i'}}M_{j'}, {}^{g_i}M_j) \neq 0$
- (c) les deux diagonales $d_{i,(i+1)+j}$ et $d_{i',(i'+1)+j'}$ se croisent.

Démonstration 4.2.1 *La proposition 4.1.1 permet d'écrire que la condition (b) équivaut à $g_{i'} = g_{i-1}$ et $j' = j$. Autrement dit, $i' = i-1$ et $j' = j$, ce qui entraîne que, $i' < i < (i' + j') + 1 < (i + j) + 1$, d'où la condition (c). De même, la condition (a) permet d'écrire que $g_i = g_{i'-1}$ et $j = j'$, de sorte qu'on ait $i < i' < (i + j) + 1 < (i' + j') + 1$, ce qui équivaut à la condition (c), d'où le résultat.*

Soit maintenant \mathcal{F} l'ensemble des sommets gelés du carquois avec potentiel (Q_σ, W_σ) . On rappelle que les côtés $d_{i,i+1}$ de $(P_{n+3,0})$ sont renumérotés comme dans le théorème 4.1.2, c'est-à-dire, $\mathcal{F} = \{(i+1, 0), 1 \leq i \leq n+3\}$, tandis que les sommets internes, associés aux diagonales $d_{i,(i+1)+j}$, pour tout $1 \leq j \leq n$, sont définis par $\overline{\mathcal{F}} = \{(i+1, j), d_{i,(i+1)+j} \in \sigma\}$.

Théorème 4.2.1 *L'application $\sigma \mapsto \bigoplus_{\mathcal{F} \cup \overline{\mathcal{F}}} \langle x_i, \prod_{k=1}^j y_{i+k} \rangle$ établit une correspondance bijective entre l'ensemble des triangulations du polygone sans $(P_{n+3,0})$ et l'ensemble des iso-classes de $(R_0 * G_{n+3})$ -modules de Cohen-Macaulay inclinants amassés tel qu'il existe un isomorphisme de k -algèbres*

$$\text{End}_\Lambda(\Gamma_\sigma e_{\mathcal{F}}) \simeq (\Gamma_\sigma)^{op}$$

Démonstration 4.2.2 Soit 1 l'identité de l'algèbre jacobienne gelée Γ_σ . De la décomposition $1 = e_{\mathcal{F}} + (1 - e_{\mathcal{F}})$, il suit $\Gamma_\sigma^{\text{op}} = \Gamma_\sigma e_{\mathcal{F}} \oplus \Gamma_\sigma (1 - e_{\mathcal{F}})$ et $\Gamma_\sigma e_{\mathcal{F}} = [e_{\mathcal{F}} \Gamma_\sigma e_{\mathcal{F}}] \oplus [(1 - e_{\mathcal{F}}) \Gamma_\sigma e_{\mathcal{F}}]$. Or, pour $\Lambda = e_{\mathcal{F}} \Gamma_\sigma e_{\mathcal{F}}$, on a :

$$\begin{aligned} \text{End}_\Lambda(\Gamma_\sigma e_{\mathcal{F}}) &= \text{Hom}_\Lambda(\Gamma_\sigma e_{\mathcal{F}}, \Gamma_\sigma e_{\mathcal{F}}) \\ &= \text{Hom}_\Lambda(e_{\mathcal{F}} \Gamma_\sigma e_{\mathcal{F}} \oplus (1 - e_{\mathcal{F}}) \Gamma_\sigma e_{\mathcal{F}}, \Gamma_\sigma e_{\mathcal{F}}) \\ &\cong \Gamma_\sigma e_{\mathcal{F}} \oplus \text{Hom}_\Lambda((1 - e_{\mathcal{F}}) \Gamma_\sigma e_{\mathcal{F}}, \Gamma_\sigma e_{\mathcal{F}}). \end{aligned}$$

Alors, on affirme que $\text{Hom}_\Lambda((1 - e_{\mathcal{F}}) \Gamma_\sigma e_{\mathcal{F}}, \Gamma_\sigma e_{\mathcal{F}})$ est isomorphe à $\Gamma_\sigma (1 - e_{\mathcal{F}})$. En effet, d'une part, l'isomorphisme de Γ_σ -modules à gauche $\Gamma_\sigma e_{\mathcal{F}} \cong \text{Hom}_{\Gamma_\sigma}(e_{\mathcal{F}} \Gamma_\sigma, \Gamma_\sigma)$ et le théorème d'adjonction entraînent l'isomorphisme fonctoriel

$$\text{Hom}_\Lambda((1 - e_{\mathcal{F}}) \Gamma_\sigma e_{\mathcal{F}}, \Gamma_\sigma e_{\mathcal{F}}) \cong \text{Hom}_{\Gamma_\sigma}((1 - e_{\mathcal{F}}) \Gamma_\sigma e_{\mathcal{F}} \otimes_\Lambda e_{\mathcal{F}} \Gamma_\sigma, \Gamma_\sigma).$$

D'autre part, puisque $e_{\mathcal{F}} \Gamma_\sigma$ est un $(\Lambda - \Gamma_\sigma)$ -bimodule Γ_σ -projectif de type fini, alors, d'après les isomorphismes

$$\begin{aligned} (1 - e_{\mathcal{F}}) \Gamma_\sigma e_{\mathcal{F}} &\cong (1 - e_{\mathcal{F}}) \Gamma_\sigma e_{\mathcal{F}} \otimes_\Lambda e_{\mathcal{F}} \Gamma_\sigma e_{\mathcal{F}} \\ &\cong (1 - e_{\mathcal{F}}) \Gamma_\sigma e_{\mathcal{F}} \otimes_\Lambda \text{Hom}_{\Gamma_\sigma}(e_{\mathcal{F}} \Gamma_\sigma, e_{\mathcal{F}} \Gamma_\sigma), \end{aligned}$$

il suit, d'après [Ass97, Proposition 2.10], que

$$(1 - e_{\mathcal{F}}) \Gamma_\sigma e_{\mathcal{F}} \cong \text{Hom}_{\Gamma_\sigma}(e_{\mathcal{F}} \Gamma_\sigma, (1 - e_{\mathcal{F}}) \Gamma_\sigma e_{\mathcal{F}} \otimes_\Lambda e_{\mathcal{F}} \Gamma_\sigma),$$

c'est-à-dire,

$$\text{Hom}_{\Gamma_\sigma}(e_{\mathcal{F}} \Gamma_\sigma, (1 - e_{\mathcal{F}}) \Gamma_\sigma) \cong \text{Hom}_{\Gamma_\sigma}(e_{\mathcal{F}} \Gamma_\sigma, (1 - e_{\mathcal{F}}) \Gamma_\sigma e_{\mathcal{F}} \otimes_\Lambda e_{\mathcal{F}} \Gamma_\sigma), .$$

Autrement dit, d'après [Ass97, Lemme 3.1.], on a

$$(1 - e_{\mathcal{F}}) \Gamma_\sigma \cong (1 - e_{\mathcal{F}}) \Gamma_\sigma e_{\mathcal{F}} \otimes_\Lambda e_{\mathcal{F}} \Gamma_\sigma \tag{4.2.1}$$

Finalement, en appliquant le foncteur $\text{Hom}_{\Gamma_\sigma}(-, e_{\mathcal{F}} \Gamma_\sigma)$ à cet isomorphisme, le résultat s'ensuit. Il reste à montrer que $\bigoplus_{\mathcal{F} \cup \bar{\mathcal{F}}} \langle x_i, \prod_{k=1}^j y_{i+k} \rangle = \Gamma_\sigma e_{\mathcal{F}}$ et est bien inclinant amassé.

Tout d'abord, on a, d'une part

$$\begin{aligned} \bigoplus_{\mathcal{F} \cup \overline{\mathcal{F}}} \langle x_i, \prod_{k=1}^j y_{i+k} \rangle &= [\bigoplus_{\mathcal{F}} \langle x_i, e_{i+1} \rangle] \oplus [\bigoplus_{\overline{\mathcal{F}}} \langle x_i, \prod_{k=1}^j y_{i+k} \rangle] \\ &= [e_{\mathcal{F}} \Gamma_{\sigma} e_{\mathcal{F}}] \oplus [\bigoplus_{d_{i,(i+1)+j} \in \sigma} e_{(i+1,j)} \Gamma_{\sigma} e_{\mathcal{F}}], \text{ d'après le théorème 4.1.2.} \end{aligned}$$

Mais comme $\sum_{d_{i,(i+1)+j} \in \sigma} e_{(i+1,j)}$, noté $e_{\overline{\mathcal{F}}}$, est la somme de tous les idempotents correspondant aux diagonales dans σ , c'est-à-dire, $e_{\overline{\mathcal{F}}} = (1 - e_{\mathcal{F}})$, l'égalité précédente devient

$$\begin{aligned} \bigoplus_{\mathcal{F} \cup \overline{\mathcal{F}}} \langle x_i, \prod_{k=1}^j y_{i+k} \rangle &= [e_{\mathcal{F}} \Gamma_{\sigma} e_{\mathcal{F}}] \oplus [e_{\overline{\mathcal{F}}} \Gamma_{\sigma} e_{\mathcal{F}}] \\ &= [e_{\mathcal{F}} + e_{\overline{\mathcal{F}}}] \Gamma_{\sigma} e_{\mathcal{F}} \\ &= \Gamma_{\sigma} e_{\mathcal{F}}. \end{aligned}$$

D'autre part, de $\langle x_i, e_{i+1} \rangle$ projectif et $\langle x_i, \prod_{k=1}^j y_{i+k} \rangle$ de Cohen-Macaulay, il suit

$$\text{Ext}_{R_0 * G_{n+3}}^1(\Gamma_{\sigma} e_{\mathcal{F}}, \Gamma_{\sigma} e_{\mathcal{F}}) = \bigoplus_{\mathcal{F}} \bigoplus_{\overline{\mathcal{F}}} \text{Ext}_{R_0 * G_{n+3}}^1(\langle x_i, \prod_{k=1}^j y_{i+k} \rangle, \langle x_i, \prod_{k=1}^j y_{i+k} \rangle).$$

Donc, d'après la proposition 4.2.1, les diagonales de σ sont compatibles deux-à-deux si, et seulement si, $\text{Ext}_{R_0 * G_{n+3}}^1(\Gamma_{\sigma} e_{\mathcal{F}}, \Gamma_{\sigma} e_{\mathcal{F}}) = 0$. Enfin, la maximalité de σ combinée à la correspondance bijective du théorème 4.1.2 entraînent que tout $X \in \text{CM}(R_0 * G_{n+3})$ vérifiant $\text{Ext}_{R_0 * G_{n+3}}^1(X, \Gamma_{\sigma} e_{\mathcal{F}}) = 0$ est dans $\text{add}(\Gamma_{\sigma} e_{\mathcal{F}})$ si, et seulement, si $\Gamma_{\sigma} e_{\mathcal{F}}$ est inclinant amassé.

Théorème 4.2.2 Soit l'hypersurface $R_0 = k[[x, y]]/\langle f \rangle$ avec $f = x^2 + y^{n+1}$. Il existe une équivalence triangulée entre la catégorie amassée de type \mathbb{A}_n et la catégorie stable des $(R_0 * G_{n+3})$ -modules de Cohen-Macaulay, c'est-à-dire,

$$\underline{\text{CM}}(R_0 * G_{n+3}) \cong \mathcal{C}(\mathbb{A}_n), \quad (4.2.2)$$

où

$$G_{n+3} = \{g = \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix} \mid \zeta = e^{i \frac{2k\pi}{n+3}}, \text{ où } k = 1, 2, \dots, n+3\}.$$

Démonstration 4.2.3 *Le corps résiduel k de R_0 est parfait, car de caractéristique nulle. D'une part, soit Q associé à σ de $(P_{n+3,0})$ tel que $(Q)_0 = (Q_\sigma)_0 \setminus \mathcal{F}$. Ce carquois Q ainsi défini est de type \mathbb{A}_n . Par conséquent, on a l'isomorphisme d'algèbres $\Gamma_\sigma^{\text{op}}/e_{\mathcal{F}} \cong (kQ)^{\text{op}}$. Cet isomorphisme, combiné au théorème 4.2.1, appliqué au passage au quotient, entraînent $\underline{\text{End}}_{R_0 * G_{n+3}}(\Gamma_\sigma e_{\mathcal{F}}) \cong (kQ)^{\text{op}}$. D'autre part, soit M un $(R_0 * G_{n+3})$ -module de Cohen-Macaulay. Si M est projectif, alors il existe un $(R_0 * G_{n+3})$ -module libre L et un $(R_0 * G_{n+3})$ -module de Cohen-Macaulay N tels que $L = M \oplus N$, de sorte que, pour tout $(R_0 * G_{n+3})$ -module de Cohen-Macaulay X , on ait :*

$$\text{Ext}_{R_0 * G_{n+3}}^1(X, L) \cong \text{Ext}_{R_0 * G_{n+3}}^1(X, M) \oplus \text{Ext}_{R_0 * G_{n+3}}^1(X, N).$$

*Par conséquent, on obtient $\text{Ext}_{R_0 * G_{n+3}}^1(X, M) = 0$, car $R_0 * G_{n+3}$ est 1-Gorenstein et L libre. Inversement, si M est injectif, alors, en tant que $(R_0 * G_{n+3})$ -module de Cohen-Macaulay, il est sous module d'un module projectif. Autrement dit, il existe une suite exacte courte $0 \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow N \longrightarrow 0$ dans $\text{CM}(R_0 * G_{n+3})$, avec P projectif. L'injectivité de M entraîne l'isomorphisme $P = M \oplus N$. Par conséquent, on obtient $\text{Ext}_{R_0 * G_{n+3}}^1(M, X) = 0$, pour tout X dans $\text{CM}(R_0 * G_{n+3})$. Cela montre que la catégorie exacte $\text{CM}(R_0 * G_{n+3})$ est de Frobenius. Le reste suit du théorème [Hap88, Théorème 2.6] combiné au lemme 2.1.2 énoncé au chapitre 2.*

II) Cas du polygone à une ponction

4.3 Modules de Cohen-Macaulay sur Λ^1

L'étude des modules de Cohen-Macaulay sur l'algèbre jacobienne gelée Λ^1 se fait directement à partir de celle faite sur Λ^0 . En effet celle-ci est rendue possible grâce à la correspondance bijective $z_i = 2x_i - \prod_{k=1}^{n+1+p} y_{i+k}$. Cette relation permet de voir l'hypersurface R_1 comme une singularité de Klein de type \mathbb{A}_{2n+3} . Mais, puisque $2n+3$ est impair, alors on en déduit tous les résultats obtenus avec Λ^0 , pour n impair. Ainsi, nous reformulons le théorème 4.1.1 comme suit.

Théorème 4.3.1 Soit l'hypersurface $R_1 = k[[z, y]]/\langle f \rangle$ une k -algèbre, où $f = x^2 + xy^{n+2}$, et

$$G_{n+3} = \{g = \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix} \mid \zeta = e^{i\frac{2k\pi}{n+3}}, \text{ où } k = 1, 2, \dots, n+3\}.$$

Posons $z_i = 2x_i - \prod_{k=1}^{n+2} y_{i+k}$. Alors les ensembles

$$E'_1 = \{^{g_i}M'_j = \langle z_i, \prod_{k=1}^j y_{i+k} \rangle \mid 0 \leq j \leq (n+1), 1 \leq i \leq n+3\}$$

et

$$E'_2 = \{^{g_i}N^+ = \langle +iz_i + \prod_{k=1}^{n+2} y_{i+k} \rangle\} \cup \{^{g_i}N^- = \langle -iz_i + \prod_{k=1}^{n+2} y_{i+k} \rangle\},$$

avec $^{g_i}M'_j \stackrel{(*)}{\cong} ^{g_{i+j+1}}M'_{(2n+3)+1-j}$, où le produit vide ($j = 0$) correspond à l'idempotent e_{i+1} du côté $i+1$ et i multiplié par z_i désigne le nombre imaginaire pur et le i en indice satisfait $1 \leq i \leq n+3$, contiennent exactement $(n+3)^2$ éléments et forment la liste complète de tous les $R_1 * G_{n+3}$ -modules de Cohen-Macaulay indécomposables à isomorphisme près.

Démonstration 4.3.1 La preuve de ce théorème découle directement de celle de 4.1.1.

En effet le changement de variables $z_i = 2x_i - \prod_{k=1}^{n+2} y_{i+k}$ transforme la singularité R_1 en une singularité de Klein de type $\mathbb{A}_{(2n+3)}$, notée R' . Mais comme $(2n+3)$ est impair et R' 1-Gorenstein, alors tout $R' * G_{n+3}$ -module de Cohen-Macaulay est sous module de module projectif. Par conséquent, l'ensemble E'_1 suit, d'après le théorème 4.1.1, pour tout $0 \leq j \leq \frac{(2n+3)-1}{2} = (n+1)$ et $1 \leq i \leq n+3$, c'est-à-dire $0 \leq ij \leq (n+1)(n+3)$. D'autre part, on a la factorisation $z^2 + y^{2(n+2)} = (+iz + y^{n+2})(-iz + y^{n+2})$. On pose alors $\psi_{n+2}^+ = +iz + y^{n+2}$ et $\psi_{n+2}^- = -iz + y^{n+2}$. Donc, pour $j = \frac{(2n+3)+1}{2} = (n+2)$, le $R' * G_{n+3}$ -module de Cohen-Macaulay $^{g_i}M'_{n+2}$ se décompose en somme directe des $R' * G$ -modules de Cohen-Macaulay indécomposables $\langle -iz_i + \prod_{k=1}^{n+2} y_{i+k} \rangle$ et $\langle +iz_i + \prod_{k=1}^{n+2} y_{i+k} \rangle$, définis, respectivement, par les factorisations de matrices $(\psi_{n+2}^+, \psi_{n+2}^-)$ et $(\psi_{n+2}^-, \psi_{n+2}^+)$. Cette décomposition est

donnée par l'isomorphisme

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : M'_{n+2} \longrightarrow N^+ \oplus N^-$$

$$(x_i a + \prod_{k=1}^{n+2} y_{i+k}) \longmapsto \begin{pmatrix} \psi_{n+2}^+(-ia + b) \\ \psi_{n+2}^-(ia + b) \end{pmatrix},$$

d'inverse

$$\begin{pmatrix} u^{-1} & v^{-1} \end{pmatrix} : N^+ \oplus N^- \longrightarrow M'_{n+2}$$

$$\begin{pmatrix} \psi_{n+2}^+ a \\ \psi_{n+2}^- b \end{pmatrix} \longmapsto \frac{1}{2}[\psi_{n+2}^+ a + \psi_{n+2}^- b]$$

et est induite, par passage au conoyau, par l'isomorphisme de factorisations de matrices $(\begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}) : (\varphi_{n+2}, \varphi_{n+2}) \longrightarrow (\begin{pmatrix} \psi_{n+2}^- & 0 \\ 0 & \psi_{n+2}^+ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \psi_{n+2}^+ & 0 \\ 0 & \psi_{n+2}^- \end{pmatrix})$, voir le diagramme 4.3.3 ci-dessous. Enfin, en remplaçant l'entier n par $n' = 2n + 3$ dans le morphisme définissant l'isomorphisme $(*)$ au théorème 4.1.1, on obtient l'isomorphisme $(*)$. Toute fois, on note que, pour $j = n + 2$, on a ${}^{g_{i+j+1}}M'_{(2n+3)+1-j} = {}^g M'_j$, c'est-à-dire, l'isomorphisme $(*)$ devient une identité. Par conséquent, ladite décomposition fournit exactement $2(n + 3)$ modules de Cohen-Macaulay indécomposables non projectifs sur $(R' * G_{n+3})$ supplémentaires formant l'ensemble E'_2 . Ce qui fait en tout $(n + 1)(n + 3) + 2(n + 3) = (n + 3)^2$ isoclasses de $(R' * G_{n+3})$ -modules de Cohen-Macaulay indécomposables non projectifs.

Soient maintenant \mathcal{J}' l'ensemble des $R' * G_{n+3}$ -modules de Cohen-Macaulay indécomposables, \mathcal{I}' celui de tous les côtés et arcs de $(P_{n+3,1})$ et $d_{i,i'}$ un arc simple comme défini ci-haut mais pour $i \neq i'$. Si $i = i'$, alors $j = n + 2$. Dans ce cas, on étiquette l'arc $d_{i,i}$ par $d_{i,i'}^+$ ou $d_{i,i'}^-$. Plus généralement, on note $d_{i,i'}^\pm$ un arc quelconque dans l'intérieur de $(P_{n+3,1})$, ce qui désigne soit un arc simple ($i \neq i'$) soit un arc étiqueté ($i = i'$).

La définition qui suit est une version adaptée de 1.2.3 au polygone $(P_{n+3,1})$.

Définition 4.3.1 *Un chemin $d_{i,i'}^\pm$ est un arc étiqueté dans l'intérieur de $(P_{n+3,1})$ si $d_{i,i'}$ et le chemin de bord $\delta_{i,i'}$ forment un m -gone, pour tout $m \in \{3, 4, \dots, n + 3\}$, ou $i = i'$.*

Définition 4.3.2 Un **mouvement élémentaire** d'un arc étiqueté $d_{i,i'}^\pm$ dans $(P_{n+3,1})$ dans le sens horaire est une paire ordonnée $(d_{i,(i+1)+j}^\pm, (d_{i',(i'+1)+j'}^\pm)$ d'arcs étiquetés définie suivant les valeurs de j comme suit :

- si $j = 1$ et $2 \leq j \leq n$, on a $d_{i,(i+1)+j}^\pm = d_{i,(i+1)+j}$. Par conséquent on retrouve les mêmes mouvements élémentaires qu'à la définition 4.1.2 ;
- si $j = n + 1$, on a $|i - i'| = 1$. Il existe alors deux types de mouvements élémentaires dans le sens horaire donnés par les applications $d_{i,i-1} \mapsto d_{i,i-2}$ et $d_{i,i-1} \mapsto d_{i-1,i-1}^\pm$;
- enfin, si $j = n + 2$, on a $i = i'$. Dans ce cas il existe un unique type de mouvement élémentaire défini par l'application $d_{i,i}^\pm \mapsto d_{i,i-1}$.

On note que les types de mouvements élémentaires $d_{i,i-1} \mapsto d_{i-1,i-1}^\pm$ et $d_{i,i}^\pm \mapsto d_{i,i-1}$ donnent chacun lieu à deux possibilités de mouvements élémentaires. Cette décomposition, due à la possibilité d'étiqueter l'arc $d_{i,i}$ soit en $d_{i,i}^-$ soit en $d_{i,i}^+$, explique l'existence des suites presque scindées avec trois termes médians, voir Proposition 4.3.1.

L'indexation habituelle des diagonales de $(P_{n+3,0})$ par les $(R_0 * G_{n+3})$ -modules Cohen-Macaulay, donnée au lemme 4.1.1, s'étend naturellement au polygone à une ponction $(P_{n+3,1})$. Notons alors ${}^{g_i}M_j^\pm = {}^{g_i}M'_j$, si $j \neq n + 2$, et ${}^{g_i}M_j^\pm = {}^{g_i}N^+$ (ou ${}^{g_i}N^-$), sinon. Le théorème qui suit généralise ce résultat aux arcs étiquetés.

Théorème 4.3.2 Il existe une correspondance bijective entre \mathcal{I}' et \mathcal{J}' définie comme suit

$$\delta' : \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{I}' & \longrightarrow & \mathcal{J}' \\ d_{i,(i+1)+j}^\pm & \longmapsto & {}^{g_i}M_j^\pm \end{array}, \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n + 3 \text{ et } 0 \leq j \leq n + 2.$$

Démonstration 4.3.2 On raisonne suivant $j = \min\{k, k'\}$. Le cas $j = 0$ est trivial. Si $j \neq n + 2$, on a $d_{i,i'}^\pm = d_{i,i'}$, pour tout $1 \leq i, i' \leq n + 3$. Mais comme les arcs $d_{i,i'}$ et $d_{i',i}$ ne sont pas homotopes, alors il suit $d_{i,i'} = d_{i,(i+1)+j}$, pour tout $1 \leq i \leq n + 3$ et $1 \leq j \leq n + 1$. Ce qui fournit $(n + 3)(n + 1)$ arcs simples $d_{i,(i+1)+j}$, à homotopie près, correspondant aux $R' * G_{n+3}$ -modules Cohen-Macaulay indécomposables non projectifs ${}^{g_i}M_j^\pm = {}^{g_i}M'_j$. Et si $j = n + 2$, alors d'une part, on a $i = i'$, c'est-à-dire, $d_{i,i'}^\pm = \{d_{i,i}^+, d_{i,i}^-\mid 1 \leq i \leq n + 3\}$ et, d'autre part, le $R' * G_{n+3}$ -modules Cohen-Macaulay indécomposables ${}^{g_i}M_{n+2}^\pm$ se décompose

en somme directe de ${}^{g_i}N^+ = \langle +iz_i + \prod_{k=1}^{n+2} y_{i+k} \rangle$ et ${}^{g_i}N^- = \langle -iz_i + \prod_{k=1}^{n+2} y_{i+k} \rangle$ définis par les matrices de factorisations $(\psi_{n+2}^+, \psi_{n+2}^-)$ et $(\psi_{n+2}^-, \psi_{n+2}^+)$, pour tout $1 \leq i \leq n+3$. Enfin, en associant les arcs étiquetés $d_{i,i}^+$ et $d_{i,i}^-$ aux $R' * G_{n+3}$ -modules Cohen-Macaulay ${}^{g_i}N^+$ et ${}^{g_i}N^-$, respectivement, on établit une correspondance bijective entre \mathcal{I}' et \mathcal{J}' .

Une partie des suites presque scindées des $(R' * G_{n+3})$ -modules de Cohen-Macaulay sont définies presque de la même façon que celles dans $\text{CM}(R_0 * G_{n+3})$, dans le cas où est n impair. La correspondance $z_i = 2x_i - \prod_{k=1}^{n+2} y_{i+k}$ traduit que les mouvements élémentaires se font quasiment de la même façon dans $(P_{n+3,1})$ et $(P_{n+3,0})$. Toutefois, la décomposition du module ${}^{g_i}M_{n+2}^\pm$ en somme directe donne lieu à d'autres types de suites presque scindées. Plus précisément, on a la proposition qui suit.

Proposition 4.3.1 *Soit l'hypersurface $R' = k[[x, y]]/\langle f \rangle$ une k -algèbre, où $f = x^2 + y^{2n+4}$. Considérons le R' -module de Cohen-Macaulay M'_j correspondant à la matrice de factorisation (φ'_j, φ'_j) , où*

$$\varphi'_j = \begin{pmatrix} z & y^j \\ y^{2n+4-j} & -z \end{pmatrix} \quad (4.3.1)$$

Puisque $n' = 2n+3$ est impair, alors la catégorie $\underline{\text{CM}}(R' * G_{n+3})$ admet quatre types de suites presque scindées définies comme suit.

- si $j = 1$, il existe une famille de suites presque scindées avec un seul terme médian données par

$$0 \longrightarrow {}^{g_i}M'_1 \xrightarrow{\alpha'_1} {}^{g_{i-1}}M'_2 \xrightarrow{\beta'_1} {}^{g_{i-1}}M'_1 \longrightarrow 0; \quad (4.3.2)$$

- si $2 \leq j \leq n$, il existe une famille de suites presque scindées avec deux termes médians données, pour tout $1 \leq i \leq n+3$, par

$$0 \longrightarrow {}^{g_i}M'_j \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha_j \\ \alpha'_j \end{pmatrix}} {}^{g_i}M'_{j-1} \oplus {}^{g_{i-1}}M'_{j+1} \xrightarrow{(\beta_j \beta'_j)} {}^{g_{i-1}}M'_j \longrightarrow 0; \quad (4.3.3)$$

- si $j = n+1$, il existe une famille de suites presque scindées avec trois termes médians données par

$$0 \longrightarrow {}^{g_i}M'_{n+1} \xrightarrow{r} {}^{g_i}M'_n \oplus {}^{g_{i-1}}N^+ \oplus {}^{g_{i-1}}N^- \xrightarrow{s} {}^{g_{i-1}}M'_{n+1} \longrightarrow 0, \quad (4.3.4)$$

où les matrices r et s sont données respectivement par $\begin{pmatrix} \alpha_{n+1} \\ \lambda_{n+1} \\ \pi_{n+1} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \beta_{n+1} & \lambda'_{n+1} & \pi'_{n+1} \end{pmatrix}$;

- si $j = n+2$, il existe deux familles de suites presque scindées avec un seul terme médian données par

$$0 \longrightarrow {}^{g_i}N^+ \xrightarrow{\lambda'_{n+1}} {}^{g_i}M'_{n+1} \xrightarrow{\pi_{n+1}} {}^{g_{i-1}}N^- \longrightarrow 0, \quad (4.3.5)$$

$$0 \longrightarrow {}^{g_i}N^- \xrightarrow{\pi'_{n+1}} {}^{g_i}M'_{n+1} \xrightarrow{\lambda_{n+1}} {}^{g_{i-1}}N^+ \longrightarrow 0, \quad (4.3.6)$$

où les morphismes α_i et β_i sont définis de la même façon que dans la proposition 4.1.1, pour tout $1 \leq i \leq n+3$ et $1 \leq j \leq n+1$, et le reste (pour $j = n+2$) comme suit

$$\lambda_{n+1}(x_i a + \prod_{k=1}^{n+1} y_{i+k} b) = \psi_{n+2}^+(-iy_{i-1}a + b), \quad (4.3.7)$$

$$\pi_{n+1}(x_i a + \prod_{k=1}^{n+1} y_{i+k} b) = \psi_{n+2}^-(iy_{i-1}a + b), \quad (4.3.8)$$

$$\lambda'_{n+1}(\psi_{n+2}^+ a) = -\frac{1}{2}\psi_{n+2}^+ a, \quad (4.3.9)$$

$$\pi'_{n+1}(\psi_{n+2}^- b) = -\frac{1}{2}\psi_{n+2}^- b. \quad (4.3.10)$$

Démonstration 4.3.3 Il suffit de montrer le cas $j = n+1$, les cas $j = 1$ et $1 \leq j \leq n$ se calculent comme à la proposition 4.1.1, en remplaçant partout n par $2n+3$ sauf pour l'ordre de G_{n+3} qui reste toujours égal à $n+3$ tandis que le cas $j = n+2$ suit de celui de $j = n+1$ et du théorème d'Auslander 2.2.1 appliqué à R' , ce qui donne $\tau N_j^\pm = N_j^\mp$. En fait, le cas $j = n+1$ est le résultat de la décomposition de ${}^{g_i}M_{n+2}^\pm$ en somme directe de ${}^{g_i}N^+$ et ${}^{g_i}N^-$, voir le diagramme 4.3.3. Dans ce contexte, les morphismes λ_{n+1} et π_{n+1} correspondent, d'une part, aux mouvements élémentaires $d_{i,i-1} \mapsto d_{i-1,i-1}^+$ et $d_{i,i-1} \mapsto$

$$\begin{pmatrix} u^{-1} & v^{-1} \end{pmatrix}_{1 \times 2} \begin{pmatrix} \psi_{n+2}^+ a \\ \psi_{n+2}^- b \end{pmatrix}_{2 \times 1} = \frac{1}{2} [\psi_{n+2}^+ a + \psi_{n+2}^- b] \quad (4.3.12)$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & M'_{n+2} & & & \\ & & & \uparrow & \searrow^{\beta'_{n+1} = -Id} & & \\ & & \begin{pmatrix} \lambda_{n+1} \\ \pi_{n+1} \end{pmatrix} & \lambda^{-1} & & & \\ 0 & \longrightarrow & M'_{n+1} & \longrightarrow & N^+ \oplus N^- & \longrightarrow & M'_{n+1} \longrightarrow 0 \\ & & \searrow^{\alpha'_{n+1} = y_{i-1}} & & \uparrow_{\lambda} & \nearrow_{\begin{pmatrix} \lambda'_{n+1} & \pi'_{n+1} \end{pmatrix}} & \\ & & & & M'_{n+2} & & \end{array} \quad (4.3.13)$$

Ainsi, on obtient $\lambda_{n+1} = u \circ \alpha'_{n+1}$ et $\pi_{n+1} = v \circ \alpha'_{n+1}$, avec u et v définis en 4.3.11. D'autre part, les morphismes λ'_{n+1} et π'_{n+1} correspondent aux mouvements élémentaires $d_{i-1,i-1}^+ \mapsto d_{i-1,i-2}$ et $d_{i-1,i-1}^- \mapsto d_{i-1,i-2}$, ce qui est une inclusion, voir 4.1.2. De même, on utilise l'inverse de λ pour différencier ces deux mouvements en terme d'étiquetage. Par conséquent, on obtient $\lambda_{n+1} = \beta'_{n+1} \circ u^{-1} = -u^{-1}$ et $\pi'_{n+1} = \beta'_{n+1} \circ v^{-1} = -v^{-1}$, avec v^{-1} et v^{-1} définis en 4.3.12.

Soit $\Gamma(\Lambda')$ le carquois d'Auslander-Reiten de la catégorie stable $\underline{\text{CM}}(R' * G_{n+3})$. Ce carquois est aussi simplifié grâce à l'isomorphisme $(\star) : {}^{g_i}M'_j \cong {}^{g_{i+j+1}}M'_{2n+4-j}$, pour tout $1 \leq i \leq n+3$ et $1 \leq j \leq 2n+4$. L'ensemble de ses sommets $(\Gamma(\Lambda'))_0$ est formé par les isoclasses de $R' * G_{n+3}$ -modules de Cohen-Macaulay indécomposables non projectifs et celui de ses flèches $(\Gamma(\Lambda'))_1$ est donné par les morphismes irréductibles correspondant aux mouvements élémentaires des arcs étiquetés $d_{i,(i+1)+j}^\pm$ dans $(P_{n+3,1})$. La décomposition de ${}^{g_i}M_{n+2}^\pm$ en les modules ${}^{g_i}N^-$ et ${}^{g_i}N^+$ non isomorphes établit une similitude entre $\Gamma(\Lambda')$ et le carquois d'Auslander-Reiten de la catégorie amassée de type \mathbb{D}_{n+3} . Dans ce qui suit, nous montrons que c'est effectivement le cas.

Soit $\tau_1 : (\Gamma(\Lambda'))_0 \rightarrow (\Gamma(\Lambda'))_0$ l'application définie, pour tout $1 \leq j \leq n+1$, par

$$\tau_1'(\langle z_i, \prod_{k=1}^j y_{i+k} \rangle) = \langle z_{i+1}, \prod_{k=1}^j y_{i+1+k} \rangle, \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n+3,$$

et, pour $j = n + 2$, par

$$\tau'_1(\langle \pm iz_i + \prod_{k=1}^{n+2} y_{i+k} \rangle) = \langle \mp iz_{i+1} + \prod_{k=1}^{n+2} y_{i+1+k} \rangle, \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n + 3.$$

Lemme 4.3.1 $(\Gamma(\Lambda'), \tau'_1)$ est un carquois à translation stable.

Démonstration 4.3.4 Par construction, il paraît évident que l'application τ'_1 est une bijection. D'autre part, la proposition 4.3.1 établit que, pour tout $R' * G_{n+3}$ -module indécomposables non projectif ${}^{g_i}M_j^\pm$ et ${}^{g_{i'}}M_{j'}^\pm$, il existe une flèche ${}^{g_i}M_j^\pm \xrightarrow{\gamma} {}^{g_{i'}}M_{j'}^\pm$ si, et seulement, si $i' = i$ et $j' = j - 1$ ou $i' = i - 1$ et $j' = j + 1$, pour tout $1 \leq i \leq n + 3$ et $1 \leq j \leq n + 2$, c'est-à-dire, si, et seulement, si soit ${}^{g_{i'}}M_{j'}^\pm = {}^{g_i}M_{j-1}^\pm$ et $\tau'_1({}^{g_{i'}}M_{j'}^\pm) = {}^{g_{i+1}}M_{j-1}^\pm$ soit ${}^{g_{i'}}M_{j'}^\pm = {}^{g_{i-1}}M_{j+1}^\pm$ et $\tau'_1({}^{g_{i'}}M_{j'}^\pm) = {}^{g_i}M_{j+1}^\pm$, pour tout $1 \leq i \leq n + 3$ et $1 \leq j \leq n + 2$, ce qui correspond, d'après le théorème 4.3.2, soit à la diagonale $d_{(i+1),((i+1)+1)+(j-1)} = d_{(i+1),(i+1)+j}$ soit à la diagonale $d_{i,(i+1)+(j+1)}$. Par conséquent, il suit, d'après la définition 4.1.2, qu'il existe un unique mouvement élémentaire soit $d_{i+1,(i+1)+j} \xrightarrow{\mu} d_{i,(i+1)+j}$, correspondant à la multiplication à gauche par $y_{i+1} = \alpha_{i+1}$, soit $d_{i,(i+1)+(j+1)} \xrightarrow{\mu} d_{i,(i+1)+j}$, correspondant à l'inclusion β_i , respectivement, d'où un unique morphisme irréductible soit ${}^{g_{i+1}}M_{j-1}^\pm \xrightarrow{\delta(\mu)} {}^{g_i}M_j^\pm$ soit ${}^{g_i}M_{j+1}^\pm \xrightarrow{\delta(\mu)} {}^{g_i}M_j^\pm$, respectivement. Enfin, puisqu'il existe au plus une flèche d'un sommet à l'autre, alors le résultat s'ensuit.

On rappelle que le carquois d'Auslander-Reiten de la catégorie amassée de type

$$(\mathbb{D}_{n+3}) : (n+1) \longleftarrow n \longleftarrow \cdots \longleftarrow 1 \begin{array}{l} \swarrow 0 \\ \searrow \bar{0} \end{array},$$

noté $\Gamma(\mathbb{D}_{n+3})$, est un carquois à translation stable formé de n copies de (\mathbb{D}_{n+3}) et défini comme suit

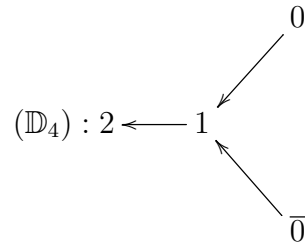
$$(\mathbb{Z}_{n+3} \times \mathbb{D}_{n+3})_0 = \{(m, i) \mid m \in \mathbb{Z}_{n+3}, i \in (\mathbb{D}_{n+3})_0\},$$

$$(\mathbb{Z}_{n+3} \times \mathbb{D}_{n+3})_1 = \{(m, i) \xrightarrow{(m, \alpha)} (m, j) \mid \alpha \in (\mathbb{D}_{n+3})_1\} \cup \{(m, j) \xrightarrow{(m, \alpha')} (m-1, i) \mid \alpha' = -\alpha\},$$

admet pour translation l'application $\tau : (\mathbb{Z}_{n+3} \times \mathbb{D}_{n+3})_0 \longrightarrow (\mathbb{Z}_{n+3} \times \mathbb{D}_{n+3})_0$ définie par

$$\tau(m, i) = \begin{cases} (m+1, \bar{i}), & \text{si } m = n+3, \quad j \in \{0, \bar{0}\} \text{ et } n \text{ pair} \\ (m+1, i), & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple 4.3.1 (Cas n impair) Pour $n = 1$, on a



Dans ce cas, le carquois de la catégorie amassée de type \mathbb{D}_4 se présente comme dans la figure 4.5 qui suit

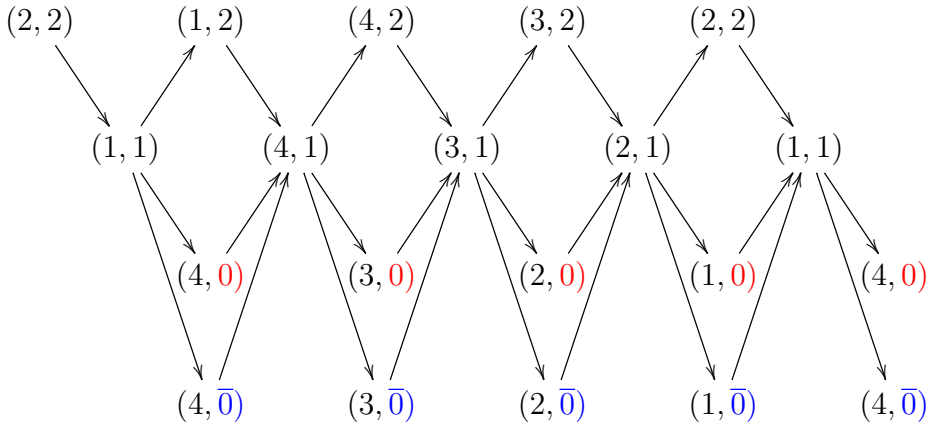
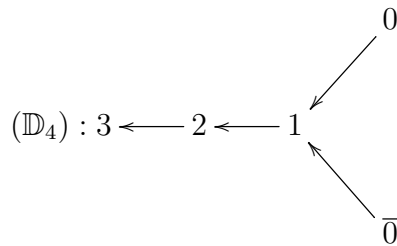


FIGURE 4.5 – Carquois d'Auslander-Reiten de la catégorie amassée de type \mathbb{D}_4

Exemple 4.3.2 (Cas n pair) Pour $n = 2$, on a



Dans ce cas, le carquois de la catégorie amassée de type \mathbb{D}_5 se présente comme dans la figure 4.6 qui suit

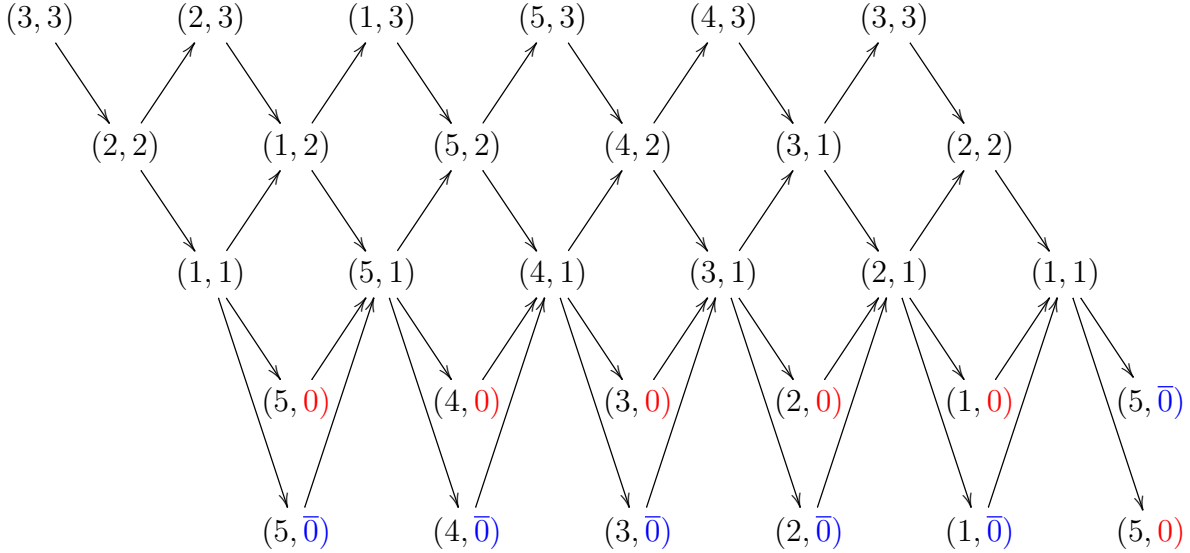


FIGURE 4.6 – Carquois d’Auslander-Reiten de la catégorie amassée de type \mathbb{D}_5

Le carquois $(\Gamma(\Lambda'), \tau'_1)$ décrit à la figure 4.7 représente deux cas de figures identiques de par leurs formes mais différents. Cette différence provient de la définition de la translation τ'_1 dans $(\Gamma(\Lambda'))_0$, pour $j = n + 2$, combinée à la parité de n . Dans ce cas, si n est pair, alors $n + 3$ est impair et, par conséquent, la suite alternée des $({}^{g_i}N^\mp)$ au niveau ν_{n+2} commence par un signe et se termine par son contraire. Autrement dit, elle se termine par deux nombres consécutifs de même parité, par l’exemple, ici par 1 et $n + 3$, voir la figure 4.6 dans l’exemple qui suit. Tandis que, si n est pair, alors $n + 3$ est impair et, par suite, ladite suite commence par un signe et se termine par le même signe, voir figure 4.5.

Théorème 4.3.3 *Le carquois $(\Gamma(\Lambda^1), \tau'_1)$ est un carquois de translation stable et est isomorphe au carquois d’Auslander-Reiten de la catégorie amassée de type \mathbb{D}_{n+3} .*

Démonstration 4.3.5 *Soit l’application $\pi : (\Gamma(\Lambda^1))_0 \rightarrow (\Gamma(\mathbb{D}_{n+3}))_0$ définie par*

$$\pi(\langle z_i, \prod_{k=1}^j y_{i+k} \rangle) = (i, n + 2 - j), \text{ pour tout } i \in \mathbb{Z}_{n+3} \text{ et } 1 \leq j \leq n + 1, \quad (4.3.14)$$

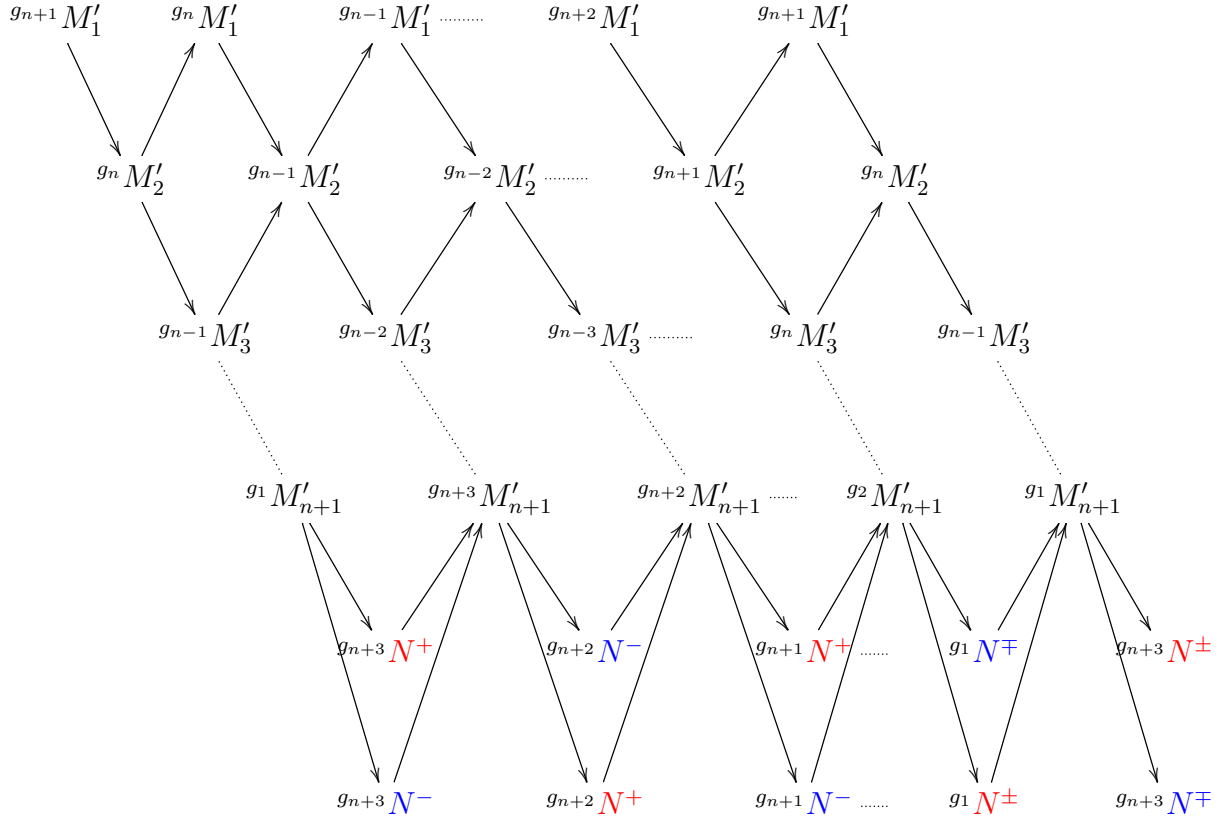


FIGURE 4.7 – Carquois d'Auslander-Reiten de la catégorie stable $\underline{\text{CM}}(R' * G_{n+3})$

et, pour $j = n + 2$, par

$$\pi(\langle \pm iz_i + \prod_{k=1}^{n+2} y_{i+k} \rangle) = \begin{cases} (i, 0)^\pm, & \text{si } i \text{ est impair} \\ (i, 0)^\mp, & \text{sinon} \end{cases}, \text{ pour tout } i \in \mathbb{Z}_{n+3}, \quad (4.3.15)$$

où la notation $(i, 0)^\pm$ signifie $(i, 0)^+ = (i, 0)$ et $(i, 0)^- = (i, \bar{0})$. On note que π est correctement définie, car tout module de Cohen-Macaulay indécomposable $g_i M_j^\pm$ est défini par l'unique paramètre (i, j) , pour tout $i \in \mathbb{Z}_{n+3}$ et $1 \leq j \leq n + 2$. Pour j fixé, notons ν_j le sous-ensemble de $\Gamma(\Lambda^1)_0$ regroupant les sommets de même degré j . Le carquois $\Gamma(\Lambda^1)$ admet donc $(n + 3)$ niveaux différents comme dans $\Gamma(\mathbb{D}_{n+3})$. Soit alors l'ensemble

$\{\nu_j\}_{1 \leq j \leq n+2}$ une $(n+2)$ -partition de $(\Gamma(\Lambda^1))_0$. On a

$$\nu_j = \{ \langle z_i, \prod_{k=1}^j y_{i+k} \rangle \mid 1 \leq i \leq n+3 \}, \text{ pour tout } 1 \leq j \leq n+1,$$

et, pour $j = n+2$,

$$\nu_{n+2} = \{ \langle -iz_i + \prod_{k=1}^{n+2} y_{i+k} \rangle \mid 1 \leq i \leq n+3 \} \cup \{ \langle +iz_i + \prod_{k=1}^{n+2} y_{i+k} \rangle \mid 1 \leq i \leq n+3 \}$$

En associant, par π , chaque partition ν_j au niveau $n+2-j$ des sommets $(i, n+2-j)$ dans $\Gamma(\mathbb{D}_{n+3})$ et la partition ν_{n+2} à ses deux derniers niveaux, correspondant aux sommets $(i, \bar{0})$ et $(i, 0)$, pour tout $1 \leq i \leq n+3$, on obtient ainsi une bijection. De même, dans les figures 4.8 et 4.9 qui suivent, la commutativité des diagrammes montre que chaque flèche dans $(\Gamma(\Lambda^1))_1$ correspond, via π , à une unique flèche dans $(\Gamma(\mathbb{D}_{n+3}))_1$ et vice-versa, c'est-à-dire, π définit aussi une bijection de $(\Gamma(\Lambda^1))_1$ dans $(\Gamma(\mathbb{D}_{n+3}))_1$.

- Pour tout $1 \leq j < n+1$:

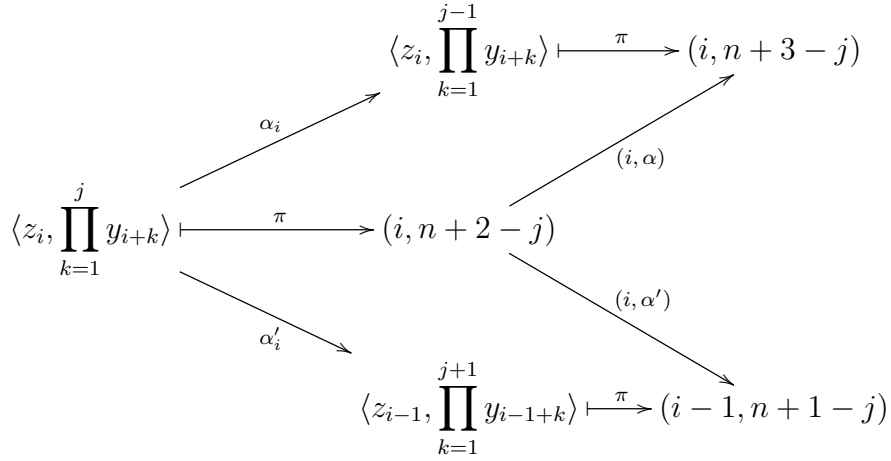


FIGURE 4.8 – Diagrammes commutatifs formés par les n premiers niveaux

- Pour $j = n + 1$:

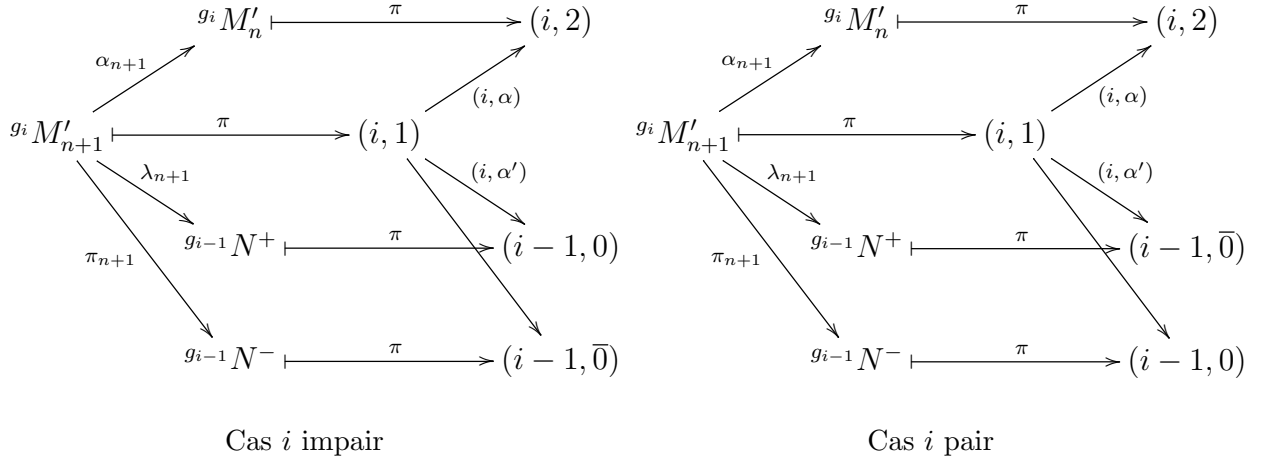


FIGURE 4.9 – Diagrammes commutatifs formés par les niveaux ν_n , ν_{n+1} et ν_{n+2}

- Pour $j = n + 2$:

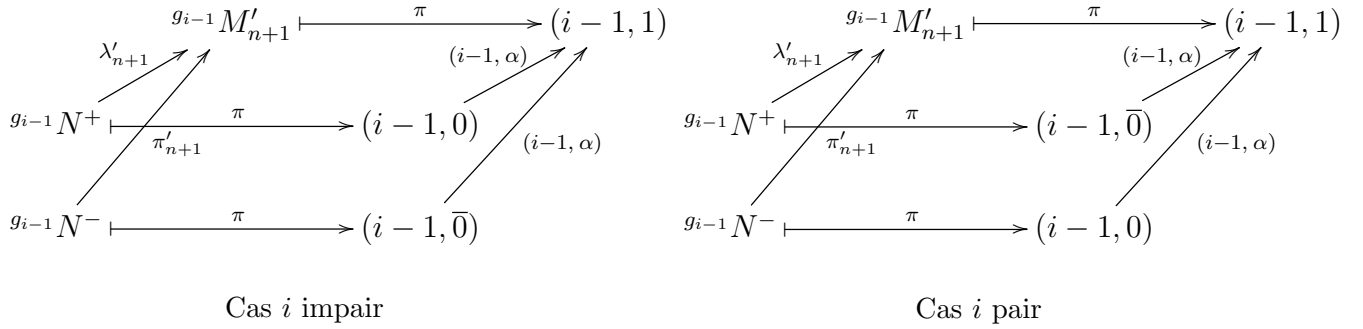


FIGURE 4.10 – Diagrammes commutatifs formés par les niveaux ν_{n+1} et ν_{n+2}

- Pour tout $1 \leq j \leq n + 1$:

$$\begin{array}{ccc}
 \langle z_{i+1}, \prod_{k=1}^j y_{i+1+k} \rangle & \xleftarrow{\tau'} & \langle z_i, \prod_{k=1}^j y_{i+k} \rangle \\
 \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\
 (i+1, n+2-j) & \xleftarrow{\tau} & (i, n+2-j)
 \end{array}$$

- Pour $j = n + 2$:

$$\begin{array}{ccc} g_{i+1} N^+ & \xleftarrow{\tau'} & g_i N^- \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ (i+1, \bar{0}) & \xleftarrow{\tau} & (i, \bar{0}) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} g_{i+1} N^- & \xleftarrow{\tau'} & g_i N^+ \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ (i, 0) & \xleftarrow{\tau} & (i-1, 0) \end{array}$$

FIGURE 4.11 – Cas i impair

$$\begin{array}{ccc} g_{i+1} N^+ & \xleftarrow{\tau'} & g_i N^- \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ (i+1, 0) & \xleftarrow{\tau} & (i, 0) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} g_{i+1} N^- & \xleftarrow{\tau'} & g_i N^+ \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ (i+1, \bar{0}) & \xleftarrow{\tau} & (i, \bar{0}) \end{array}$$

FIGURE 4.12 – Cas i pair

$$\begin{array}{ccc} g_1 N^+ & \xleftarrow{\tau'} & g_{n+3} N^- \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ (1, 0) & \xleftarrow{\tau} & (n+3, 0) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} g_1 N^- & \xleftarrow{\tau'} & g_{n+3} N^+ \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ (1, \bar{0}) & \xleftarrow{\tau} & (n+3, \bar{0}) \end{array}$$

FIGURE 4.13 – Cas $i = n + 3$ et n impair

$$\begin{array}{ccc} g_1 N^+ & \xleftarrow{\tau'} & g_{n+3} N^- \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ (1, 0) & \xleftarrow{\tau} & (n+3, \bar{0}) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} g_1 N^- & \xleftarrow{\tau'} & g_{n+3} N^+ \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ (1, \bar{0}) & \xleftarrow{\tau} & (n+3, 0) \end{array}$$

FIGURE 4.14 – Cas $i = n + 3$ et n pair

Par conséquent, il suit que π définit bien un isomorphisme de carquois. Enfin, la commutativité des diagrammes dans les figures 4.11, 4.12, 4.13 et 4.14 qui suivent permet de vérifier que la translation d'Auslander-Reiten τ dans $\Gamma(\mathbb{D}_{n+3})$ correspond à la translation τ'_1 dans $\Gamma(\mathcal{A}^1)$ via l'isomorphisme π .

Nous terminons ce dernier chapitre de cette thèse par le théorème 4.3.4 qui suit. Ce théorème résume les principaux théorèmes de ce chapitre et établit le lien existant entre triangulations du polygone à p -ponctions ($P_{n+3,p}$), pour chaque $p \in \{1, 2\}$, et les catégories amassées de type \mathbb{A}_n et \mathbb{D}_{n+3} , respectivement.

Théorème 4.3.4 *Soit $p \in \{0, 1\}$ fixé, σ_p une triangulation étiquetée du polygone ($P_{n+3,p}$), $d_{i,(i+1)+j}$ un arc étiqueté et $z_i = 2x_i - \prod_{k=1}^{n+1+p} y_{i+k}$. Notons $x_{i,p} = \begin{cases} x_i & \text{si } p=0 \\ z_i & \text{si } p=1 \end{cases}$ et posons*

$$G = G_{n+3} = \left\{ \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix} \mid \zeta = e^{i\frac{2k\pi}{n+3}}, \text{ où } k = 1, 2, \dots, n+3 \right\}.$$

Alors

(1) *L'ensemble des $(R_p * G)$ -modules de Cohen-Macaulay indécomposables, à isomorphisme près, est donné par*

$$E_p = \{ {}^{g_i}M_j = \langle x_{i,p}, \prod_{k=1}^j y_{i+k} \rangle : 0 \leq j \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil; 1 \leq i \leq |G| \} \cup p. \{ {}^{g_i}N^\pm = \langle +iz_i \pm \prod_{k=1}^{n+2} y_{i+k} \rangle \}.$$

(2) *L'application $d_{i,(i+1)+j}^\pm \mapsto \begin{cases} {}^{g_i}M_j^\pm & \text{si } p=1 \\ {}^{g_i}M_j & \text{sinon} \end{cases}$ qui associe à tout sommet de Q_{σ_p} un $R_p * G$ -module de Cohen-Macaulay établit des correspondances bijectives :*

$$\{ \text{Côtés et arcs } d_{i,(i+1)+j} \} \longleftrightarrow \{ \text{isoclasses de CM}(R_p * G)\text{-modules indécomposables } \langle x_{i,p}, \prod_{k=1}^j y_{i+k} \rangle \};$$

$$\{ \text{Côtés } d_{i,(i+1)} \} \longleftrightarrow \{ \text{isoclasses de CM}(R_p * G)\text{-modules projectifs indécomposables } \langle x_{i,p}, e_{i+1} \rangle \},$$

$$\{ \text{Triangulations } \sigma_p \} \longleftrightarrow \{ \text{isoclasses de CM}(R_p * G)\text{-modules inclinants amassés } I_\sigma^p e_F \},$$

$$\{ \text{Mouvements élémentaires} \} \longleftrightarrow \{ \text{isoclasses de CM}(R_p * G)\text{-morphisms irréductibles} \},$$

telle que, si $p = 0$, alors j varie entre 0 et $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ suivant la parité de n et, si $p = 1$, il varie entre 0 et $n + 2$.

(3) Pour tout module inclinant amassé $\Gamma_{\sigma}^p e_{\mathcal{F}} = \bigoplus_{\mathcal{F} \cup \overline{\mathcal{F}}} \langle x_i, \prod_{k=1}^j y_{i+k} \rangle$ et pour chaque $p = 0, 1$, il existe une correspondance bijective

$$\text{End}_{R_p * G_{n+3}}(\Gamma_{\sigma}^p e_{\mathcal{F}}) \simeq (\Gamma_{\sigma}^p)^{op}.$$

(4) Il existe une équivalence triangulée

$$\underline{\text{CM}}(R_p * G_{n+3}) \simeq \mathcal{C}(kQ), \quad (4.3.16)$$

où $Q = \mathbb{A}_n$, pour $p = 0$ et $Q = \mathbb{D}_{n+3}$ pour $p = 1$.

(5) Le carquois $(\Gamma(\Lambda^1), \tau_1')$ est un carquois à translation stable et est isomorphe au carquois d'Auslander-Reiten de la catégorie amassée de type \mathbb{D}_{n+3} .

Démonstration 4.3.6 (1) La preuve du cas $p = 0$ renvoie au théorème 4.1.1 tandis que celle du cas $p = 1$ réfère au théorème 4.3.1. En effet, si $p = 0$, l'ensemble $p.\{^{g_i}N^{\pm} = \langle +iz_i \pm \prod_{k=1}^{n+2} y_{i+k} \rangle\}$ est vide. Alors, en posant $n_p = n$ et $x_{i,0} = x_i$, pour tout $1 \leq i \leq |G|$, l'ensemble E_0 coïncide avec l'ensemble E_1 au théorème 4.1.1. D'autre part, si $p = 1$, l'ensemble $p.\{^{g_i}N^{\pm} = \langle +iz_i \pm \prod_{k=1}^{n+2} y_{i+k} \rangle\}$ coïncide avec l'ensemble E'_2 du théorème 4.3.1 et en posant $x_{i,1} = z_i$, pour tout $1 \leq i \leq |G|$, il s'ensuit $n_p = 2n + 2$. Par conséquent on obtient $E_1 = E'_1 \cup E'_2$, où E'_1 est l'autre ensemble qui complète la liste des classes d'isomorphismes des $(R_1 * G_{n+3})$ -modules de Cohen-Macaulay dans 4.3.1. (2) Les premières correspondances renvoient au lemme 4.1.1 et au théorème 4.3.1, la deuxième à la propositions 4.1.1 combinée à la proposition 4.3.1. (3) Le cas $p = 0$ renvoie à la preuve du théorème 4.2.1. La preuve du cas $p = 1$ se fait de la même façon que celle du cas $p = 0$, il suffit d'ajouter à $\Gamma_{\sigma}^0 e_{\mathcal{F}}$ les nouveaux modules $^{g_i}N^{\pm}$ dans $(R^1 * G_{n+3})$. Enfin, pour (4) et (5), voir preuves des théorèmes 4.2.2 et 4.3.3.

CONCLUSION

Dans cette thèse, nous avons proposé une méthode de catégorification des algèbres amassées de types \mathbb{A}_n et \mathbb{D}_{n+3} à l'aide de la théorie des factorisations de matrices sur une singularité de Klein combinée à celle des modules de Cohen-Macaulay sur une algèbre jacobienne gelée associée au polygone $(P_{n+3,p})$, pour chaque $p \in \{0, 1\}$.

Nous avons vu au chapitre 2 que ces CM-module, considérés sur une k -algèbre 1-Gorenstein A de dimension peut-être infinie, pouvaient être caractérisés comme des sous-modules de modules projectifs. Cela a permis d'établir une équivalence entre la catégorie $\text{CM}(A * G)$ et la catégorie de groupe gauche $\text{CM}(A) * G$.

Puis nous avons montré au chapitre 3 que l'algèbre jacobienne à bords gelés associée à une triangulation σ d'une surface de bords marqués avec ponctions (S, M) dépend uniquement de la surface, c'est-à-dire $A^p(\sigma) = A^p_{(S,M)}$. En particulier, nous avons calculé explicitement cette algèbre pour tout polygone à p -ponctions $(P_{n+3,p})$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, sous forme d'algèbre de groupe gauche d'un groupe cyclique d'ordre fini G_{n+3} sur une singularité d'hypersurface R_p , noté $A^p = R_p * G_{n+3}$. Nous avons vu, dans les cas où $p \in \{0, 1\}$, que les algèbres A^p sont 1-Gorenstein.

Utilisant cette propriété, nous avons pu calculer au chapitre 4, pour chaque $p \in \{0, 1\}$, tous les isoclasses de $\text{CM}(R_p * G_{n+3})$ -modules indécomposables sous forme d'idéal bilatère ${}^g M_j = \langle x_{i,p}, \prod_{k=1}^j y_{i+k} \rangle \cong y_i \langle x_{i,p}, \prod_{k=1}^j y_{i+k} \rangle$ et montrer que ceux-ci correspondent bijectivement aux arcs étiquetés $d_{i,(i+1)+j}$ dans $(P_{n+3,p})$. Cette expression particulière des isoclasses de CM-modules indécomposables donne une interprétation des arcs étiquetés $d_{i,(i+1)+j}$ en terme de polynômes $f_{i,j}(x, y) = y_i \cdot x_{i,p} + \prod_{k=0}^j y_{i+k} = x_{i-1,p} \cdot y_{i-1} + \prod_{k=0}^j y_{i+k}$, considérés à équivalence près, dans l'anneau quotient $R_p[x_i, y_i]$, pour tout $1 \leq i \leq n+3$ et $1 \leq j \leq \lceil n \rceil$ ou $1 \leq j \leq n+2$, respectivement.

Ensuite nous avons montré, d'une part, l'existence de modules inclinants amassés dans $\text{CM}(R_p * G_{n+3})$ et utiliser un résultat de Keller-Reiten [KR08, Théorème 2.1.] pour montrer une équivalence triangulée entre la catégorie $\underline{\text{CM}}(R_0 * G_{n+3})$ et la catégorie amas-

sée $\mathcal{C}(\mathbb{A}_n)$. Cette équivalence, combiné à celle entre la catégorie $\underline{\text{CM}}(R_0)$ et la catégorie 1-amassée de type \mathbb{A}_n donnée par un résultat classique de la correspondance de McKay [AIR15] [Yos90], permet d'interpréter $\mathcal{C}(\mathbb{A}_n)$ comme une catégorie de groupe gauche d'une catégorie 1-amassée de type Dynkin. D'autre part, grâce à la correspondance bijective définie par l'équation $z_i = 2x_i - \prod_{k=1}^{n+1+p} y_{i+k}$, nous avons puis traduire l'hypersurface R_1 en une singularité de Klein de type \mathbb{A}_{2n+3} et ainsi établir une équivalence entre la catégorie $\underline{\text{CM}}(R' * G_{n+3})$ et la catégorie amassée $\mathcal{C}(\mathbb{D}_n)$. Cette transformation montre un lien existant entre ces deux types de catégories amassées via une action de G_{n+3} .

Au terme de ce travail, quelques perspectives de recherches s'offrent à nous à savoir :

- (1) Soit $p \in \{0, 1\}$. Sachant qu'il existe une correspondance bijective entre variables amassées dans $\mathcal{A}_{\mathbb{A}_n}$ (respectivement dans $\mathcal{A}_{\mathbb{D}_n}$) et arcs étiquetés dans $(P_{n+3,p})$ d'une part, et entre arcs étiquetés dans $(P_{n+3,p})$ et isoclasses de CM-modules indécomposables ${}^{g_i}M_j$ d'autre part, *quelles serait l'interprétation de la combinatoire observée dans les ${}^{g_i}M_j$ en terme de phénomène de Laurent auquel obéissent les variables amassées ?*
- (2) *Pour $p \geq 2$, existe-t-il d'autres classes d'algèbres amassées \mathcal{A}_Q pouvant être catégorifiées par les catégories stables de modules de Cohen-Macaulay $\underline{\text{CM}}(R_p * G_{n+3})$?*
La cas $p = 2$ correspondrait aux algèbres amassées de type $\tilde{\mathbb{D}}_{n+3}$.

Bibliographie

- [Ami09] Amiot, Claire. Cluster categories for algebras of global dimension 2 and quivers with potential. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 59(6) :2525–2590, 2009. [xiii](#)
- [Ass97] Assem, Ibrahim. Algèbres et modules : cours et exercices. *Presses Université Ottawa*, 1997. [20](#), [91](#)
- [AB57] Maurice Auslander and David A. Buchsbaum. Homological dimension in local rings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 85 :390–405, 1957. [32](#), [48](#)
- [AIR15] Claire Amiot, Osamu Iyama, and Idun Reiten. Stable categories of Cohen-Macaulay modules and cluster categories. *Amer. J. Math.*, 137(3) :813–857, 2015. [xii](#), [111](#)
- [ALR07] Ibrahim Assem, Marcelo Lanzilotta, and María Julia Redondo. Laura skew group algebras. *Comm. Algebra*, 35(7) :2241–2257, 2007. [38](#), [39](#)
- [AR75] Maurice Auslander and Idun Reiten. Representation theory of Artin algebras. III. Almost split sequences. *Comm. Algebra*, 3 :239–294, 1975. [24](#), [25](#)
- [AR77] Maurice Auslander and Idun Reiten. Representation theory of Artin algebras. IV. Invariants given by almost split sequences. *Comm. Algebra*, 5(5) :443–518, 1977. [24](#), [25](#)
- [AR87] Maurice Auslander and Idun Reiten. Almost split sequences for rational double points. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 302(1) :87–97, 1987. [37](#)

- [Arn81] V. I. Arnol'd. *Singularity theory*, volume 53 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1981. Selected papers, Translated from the Russian, With an introduction by C. T. C. Wall. [45](#)
- [ARS95] Maurice Auslander, Idun Reiten, and Sverre O. Smalø. *Representation theory of Artin algebras*, volume 36 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. [25](#), [26](#)
- [ASS06] Ibrahim Assem, Daniel Simson, and Andrzej Skowróński. *Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1*, volume 65 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006. Techniques of representation theory. [25](#)
- [Aus74] Maurice Auslander. Representation theory of Artin algebras. I, II. *Comm. Algebra*, 1 :177–268 ; *ibid.* 1 (1974), 269–310, 1974. [24](#)
- [Aus78] Maurice Auslander. Functors and morphisms determined by objects. pages 1–244. *Lecture Notes in Pure Appl. Math.*, Vol. 37, 1978. [35](#), [44](#)
- [Aus86a] Maurice Auslander. Isolated singularities and existence of almost split sequences. In *Representation theory, II (Ottawa, Ont., 1984)*, volume 1178 of *Lecture Notes in Math.*, pages 194–242. Springer, Berlin, 1986. [32](#), [43](#), [79](#)
- [Aus86b] Maurice Auslander. Rational singularities and almost split sequences. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 293(2) :511–531, 1986. [37](#), [38](#)
- [Aus87] Maurice Auslander. The what, where, and why of almost split sequences. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986)*, pages 338–345. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987. [35](#)
- [AV85] M. Artin and J.-L. Verdier. Reflexive modules over rational double points. *Math. Ann.*, 270(1) :79–82, 1985. [32](#)

- [BD08] Igor Burban and Yuriy Drozd. Maximal Cohen-Macaulay modules over surface singularities. In *Trends in representation theory of algebras and related topics*, EMS Ser. Congr. Rep., pages 101–166. Eur. Math. Soc., Zürich, 2008. [33](#)
- [BFZ05] Arkady Berenstein, Sergey Fomin, and Andrei Zelevinsky. Cluster algebras. III. Upper bounds and double Bruhat cells. *Duke Math. J.*, 126(1) :1–52, 2005. [2](#)
- [BGS87] R.-O. Buchweitz, G.-M. Greuel, and F.-O. Schreyer. Cohen-Macaulay modules on hypersurface singularities. II. *Invent. Math.*, 88(1) :165–182, 1987. [32](#), [46](#)
- [BH93] Winfried Bruns and Jürgen Herzog. *Cohen-Macaulay rings*, volume 39 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993. [33](#)
- [BH98] Winfried Bruns and H. Jürgen Herzog. *Cohen-Macaulay rings*. Cambridge University Press, 1998. [34](#), [35](#)
- [BIRS11] A. B. Buan, O. Iyama, I. Reiten, and D. Smith. Mutation of cluster-tilting objects and potentials. *Amer. J. Math.*, 133(4) :835–887, 2011. [xii](#), [60](#)
- [BK89] A. I. Bondal and M. M. Kapranov. Representable functors, Serre functors, and reconstructions. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 53(6) :1183–1205, 1337, 1989. [21](#)
- [BMR⁺06] Aslak Bakke Buan, Robert Marsh, Markus Reineke, Idun Reiten, and Gordana Todorov. Tilting theory and cluster combinatorics. *Adv. Math.*, 204(2) :572–618, 2006. [xi](#), [19](#), [23](#), [24](#), [29](#)
- [BMR07] Aslak Bakke Buan, Robert J. Marsh, and Idun Reiten. Cluster-tilted algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 359(1) :323–332, 2007. [xi](#)
- [Boi92] Paul R Boisen. The representation theory of fully group-graded algebras. *Journal of Algebra*, 151(1) :160 – 179, 1992. [37](#)

- [BR06] Aslak Bakke Buan and Idun Reiten. Acyclic quivers of finite mutation type. *Int. Math. Res. Not.*, pages Art. ID 12804, 10, 2006.
- [Buc87] R. O. Buchweitz. Maximal cohen-macaulay modules and tate cohomology over gorenstein rings. *unpublished manuscript*, page 155 pages, 1987. [34](#), [35](#)
- [CBH98] William Crawley-Boevey and Martin P. Holland. Noncommutative deformations of Kleinian singularities. *Duke Math. J.*, 92(3) :605–635, 1998. [40](#)
- [CC06] Philippe Caldero and Frédéric Chapoton. Cluster algebras as Hall algebras of quiver representations. *Comment. Math. Helv.*, 81(3) :595–616, 2006. [xi](#)
- [CCS06] P. Caldero, F. Chapoton, and R. Schiffler. Quivers with relations arising from clusters (A_n case). *Trans. Amer. Math. Soc.*, 358(3) :1347–1364, 2006. [xii](#), [17](#), [85](#)
- [CILF12] Giovanni Cerulli Irelli and Daniel Labardini-Fragoso. Quivers with potentials associated to triangulated surfaces, Part III : tagged triangulations and cluster monomials. *Compos. Math.*, 148(6) :1833–1866, 2012. [xii](#)
- [CK06] Philippe Caldero and Bernhard Keller. From triangulated categories to cluster algebras. II. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 39(6) :983–1009, 2006. [xi](#), [19](#)
- [CK08] Philippe Caldero and Bernhard Keller. From triangulated categories to cluster algebras. *Invent. Math.*, 172(1) :169–211, 2008. [xi](#)
- [CM84] M. Cohen and S. Montgomery. Group-graded rings, smash products, and group actions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 282(1) :237–258, 1984. [37](#)
- [CPS88] E. Cline, B. Parshall, and L. Scott. Finite-dimensional algebras and highest weight categories. *J. Reine Angew. Math.*, 391 :85–99, 1988.
- [CR87] Charles W. Curtis and Irving Reiner. *Methods of representation theory. Vol. II.* Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons, Inc., New York, 1987. With applications to finite groups and orders, A Wiley-Interscience Publication. [43](#)

- [Del77] P. Deligne. *Cohomologie étale*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 569. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie SGA 4 1/2, Avec la collaboration de J. F. Boutot, A. Grothendieck, L. Illusie et J. L. Verdier. [21](#)
- [DFK09] Philippe Di Francesco and Rinat Kedem. Positivity of the T -system cluster algebra. *Electron. J. Combin.*, 16(1) :Research Paper 140, 39, 2009. [10](#)
- [DL16a] Laurent Demonet and Xueyu Luo. Ice quivers with potential associated with triangulations and Cohen-Macaulay modules over orders. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 368(6) :4257–4293, 2016. [xii](#), [xiii](#), [55](#), [69](#), [70](#)
- [DL16b] Laurent Demonet and Xueyu Luo. Ice quivers with potential arising from once-punctured polygons and Cohen-Macaulay modules. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 52(2) :141–205, 2016. [xii](#), [72](#)
- [DRt67] Ju. A. Drozd and A. V. Roĭ ter. Commutative rings with a finite number of indecomposable integral representations. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 31 :783–798, 1967. [32](#)
- [dVVdB16] Louis de Thanhoffer de Völcsey and Michel Van den Bergh. Explicit models for some stable categories of maximal Cohen-Macaulay modules. *Math. Res. Lett.*, 23(5) :1507–1526, 2016. [xii](#)
- [DWZ08] Harm Derksen, Jerzy Weyman, and Andrei Zelevinsky. Quivers with potentials and their representations. I. Mutations. *Selecta Math. (N.S.)*, 14(1) :59–119, 2008. [iii](#), [xi](#), [xii](#), [55](#), [56](#), [57](#), [60](#)
- [DWZ10] Harm Derksen, Jerzy Weyman, and Andrei Zelevinsky. Quivers with potentials and their representations II : applications to cluster algebras. *J. Amer. Math. Soc.*, 23(3) :749–790, 2010.
- [Eis80] David Eisenbud. Homological algebra on a complete intersection, with an application to group representations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 260(1) :35–64, 1980. [46](#), [48](#), [50](#)

- [Esn85] Hélène Esnault. Reflexive modules on quotient surface singularities. *J. Reine Angew. Math.*, 362 :63–71, 1985. [32](#)
- [FST08] Sergey Fomin, Michael Shapiro, and Dylan Thurston. Cluster algebras and triangulated surfaces. I. Cluster complexes. *Acta Math.*, 201(1) :83–146, 2008. [iii](#), [xii](#), [1](#), [10](#), [13](#), [15](#), [16](#), [17](#), [18](#)
- [FST12] Anna Felikson, Michael Shapiro, and Pavel Tumarkin. Skew-symmetric cluster algebras of finite mutation type. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 14(4) :1135–1180, 2012.
- [FZ02] Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky. Cluster algebras. I. Foundations. *J. Amer. Math. Soc.*, 15(2) :497–529, 2002. [xi](#), [1](#), [2](#), [5](#), [9](#)
- [FZ03a] Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky. Cluster algebras. II. Finite type classification. *Invent. Math.*, 154(1) :63–121, 2003. [xi](#), [2](#)
- [FZ03b] Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky. Cluster algebras : notes for the CDM-03 conference. In *Current developments in mathematics, 2003*, pages 1–34. Int. Press, Somerville, MA, 2003.
- [FZ07] Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky. Cluster algebras. IV. Coefficients. *Compos. Math.*, 143(1) :112–164, 2007. [2](#)
- [GK85] G.-M. Greuel and H. Knörrer. Einfache Kurvensingularitäten und torsionsfreie Moduln. *Math. Ann.*, 270(3) :417–425, 1985.
- [GLS05] Christof Geiss, Bernard Leclerc, and Jan Schröer. Semicanonical bases and preprojective algebras. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 38(2) :193–253, 2005. [5](#)
- [GM96] Sergei I. Gelfand and Yuri I. Manin. *Methods of homological algebra*. Springer-Verlag, Berlin, 1996. Translated from the 1988 Russian original. [21](#), [22](#)
- [GT87] G.-M. Greuel and G. Trautmann, editors. *Singularities, representation of algebras, and vector bundles*, volume 1273 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1987. [32](#), [79](#)

- [Hap87] Dieter Happel. On the derived category of a finite-dimensional algebra. *Comment. Math. Helv.*, 62(3) :339–389, 1987. [23](#), [28](#)
- [Hap88] Dieter Happel. *Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras*, volume 119 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988. [4](#), [22](#), [25](#), [27](#), [35](#), [93](#)
- [Har67] Robin Hartshorne. *Local cohomology*, volume 1961 of *A seminar given by A. Grothendieck, Harvard University, Fall*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1967. [33](#)
- [Her78] Jürgen Herzog. Ringe mit nur endlich vielen Isomorphieklassen von maximalen, unzerlegbaren Cohen-Macaulay-Moduln. *Math. Ann.*, 233(1) :21–34, 1978. [31](#), [79](#)
- [HK67] J. Herzog and E. Kunz. Der kanonische modul eines Cohen-Macaulay-ring. *Lecture Notes in Math*, 238, 1967. [33](#)
- [HL10] David Hernandez and Bernard Leclerc. Cluster algebras and quantum affine algebras. *Duke Math. J.*, 154(2) :265–341, 2010.
- [Iwa79] Yasuo Iwanaga. On rings with finite self-injective dimension. *Comm. Algebra*, 7(4) :393–414, 1979. [33](#)
- [Iwa80] Yasuo Iwanaga. On rings with finite self-injective dimension. II. *Tsukuba J. Math.*, 4(1) :107–113, 1980. [33](#)
- [IY08] Osamu Iyama and Yuji Yoshino. Mutation in triangulated categories and rigid Cohen-Macaulay modules. *Invent. Math.*, 172(1) :117–168, 2008. [xi](#), [19](#)
- [Jac67] H. Jacobinski. Sur les ordres commutatifs avec un nombre fini de réseaux indécomposables. *Acta Math.*, 118 :1–31, 1967. [32](#)
- [Kas91] M. Kashiwara. On crystal bases of the Q -analogue of universal enveloping algebras. *Duke Math. J.*, 63(2) :465–516, 1991. [xi](#)

- [Kel05] Bernhard Keller. On triangulated orbit categories. *Doc. Math.*, 10 :551–581, 2005. [23](#), [24](#), [56](#)
- [Knö87] Horst Knörrer. Cohen-Macaulay modules on hypersurface singularities. I. *Invent. Math.*, 88(1) :153–164, 1987. [46](#)
- [KR08] Bernhard Keller and Idun Reiten. Acyclic Calabi-Yau categories. *Compos. Math.*, 144(5) :1332–1348, 2008. With an appendix by Michel Van den Bergh. [iii](#), [xii](#), [xiv](#), [79](#), [89](#), [110](#)
- [KV87] Bernhard Keller and Dieter Vossieck. Sous les catégories dérivées. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 305(6) :225–228, 1987. [35](#)
- [KY11] Keller, Bernhard and Yang, Dong. Derived equivalences from mutations of quivers with potential. *Adv. Math.*, 226(3) :2118–2168, 2011. [xiii](#)
- [Len86] Helmut Lenzing. Curve singularities arising from the representation theory of tame hereditary algebras. In *Representation theory, I (Ottawa, Ont., 1984)*, volume 1177 of *Lecture Notes in Math.*, pages 199–231. Springer, Berlin, 1986. [40](#)
- [LF10] Daniel Labardini-Fragoso. *Quivers with potentials associated with triangulations of Riemann surfaces*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2010. Thesis (Ph.D.)–Northeastern University. [xiii](#), [61](#)
- [LF16] Daniel Labardini-Fragoso. Quivers with potentials associated to triangulated surfaces, part IV : removing boundary assumptions. *Selecta Math. (N.S.)*, 22(1) :145–189, 2016. [xii](#)
- [Liu10] Shiping Liu. Auslander-Reiten theory in a Krull-Schmidt category. *São Paulo J. Math. Sci.*, 4(3) :425–472, 2010. [27](#), [28](#)
- [LS15] Kyungyong Lee and Ralf Schiffler. Positivity for cluster algebras. *Ann. of Math. (2)*, 182(1) :73–125, 2015. [10](#)
- [Lus91] G. Lusztig. Quivers, perverse sheaves, and quantized enveloping algebras. *J. Amer. Math. Soc.*, 4(2) :365–421, 1991. [xi](#)

- [Lus97] George Lusztig. Total positivity and canonical bases. In *Algebraic groups and Lie groups*, volume 9 of *Austral. Math. Soc. Lect. Ser.*, pages 281–295. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997. [xi](#)
- [Mar99] Andrei Marcus. *Representation theory of group graded algebras*. Nova Science Publishers, Inc., Commack, NY, 1999. [37](#)
- [McK83] J. McKay. Graphs, singularities and finite groups. *Uspekhi Mat. Nauk*, 38(3(231)) :159–162, 1983. Translated from the English by S. A. Syskin. [40](#)
- [MRZ03] Robert Marsh, Markus Reineke, and Andrei Zelevinsky. Generalized associahedra via quiver representations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 355(10) :4171–4186, 2003. [xi](#)
- [MSW11] Gregg Musiker, Ralf Schiffler, and Lauren Williams. Positivity for cluster algebras from surfaces. *Adv. Math.*, 227(6) :2241–2308, 2011. [10](#)
- [Nak11] Hiraku Nakajima. Quiver varieties and cluster algebras. *Kyoto J. Math.*, 51(1) :71–126, 2011. [10](#)
- [Nee01] Amnon Neeman. *Triangulated categories*, volume 148 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001. [20](#)
- [Orl04] D. O. Orlov. Triangulated categories of singularities and D-branes in Landau-Ginzburg models. *Tr. Mat. Inst. Steklova*, 246(Algebr. Geom. Metody, Svyazi i Prilozh.) :240–262, 2004. [35](#)
- [Pas86] Donald S. Passman. *Group rings, crossed products and Galois theory*, volume 64 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC ; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1986. [37](#)
- [Rei87] Idun Reiten. Finite-dimensional algebras and singularities. In *Singularities, representation of algebras, and vector bundles (Lambrecht, 1985)*, volume 1273 of *Lecture Notes in Math.*, pages 35–57. Springer, Berlin, 1987.

- [Rei95] Miles Reid. *Undergraduate commutative algebra*, volume 29 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. [44](#)
- [Ric89] Jeremy Rickard. Derived categories and stable equivalence. *J. Pure Appl. Algebra*, 61(3) :303–317, 1989. [35](#)
- [Rie80] C. Riedtmann. Algebren, darstellungsköcher, ueberlagerungen und zurück. *Commentarii mathematici Helvetici*, 55 :199–224, 1980. [3](#)
- [RR85] Idun Reiten and Christine Riedtmann. Skew group algebras in the representation theory of Artin algebras. *J. Algebra*, 92(1) :224–282, 1985. [37](#), [39](#), [40](#), [41](#), [72](#)
- [RVdB89] Idun Reiten and Michel Van den Bergh. Two-dimensional tame and maximal orders of finite representation type. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 80(408) :viii+72, 1989. [40](#)
- [RZ17] Claus Michael Ringel and Pu Zhang. Representations of quivers over the algebra of dual numbers. *J. Algebra*, 475 :327–360, 2017.
- [Sai85] Kyoji Saito. Extended affine root systems. I. Coxeter transformations. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 21(1) :75–179, 1985.
- [Sch08] Ralf Schiffler. A geometric model for cluster categories of type d n. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 27(1) :1–21, Feb 2008. [xiv](#), [3](#), [80](#), [83](#)
- [Sko06] Andrzej Skowroński. Selfinjective algebras : finite and tame type. In *Trends in representation theory of algebras and related topics*, volume 406 of *Contemp. Math.*, pages 169–238. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006. [43](#)
- [SW12] Anne V. Shepler and Sarah Witherspoon. Group actions on algebras and the graded Lie structure of Hochschild cohomology. *J. Algebra*, 351 :350–381, 2012. [37](#)

- [Ver96] Jean-Louis Verdier. Des catégories dérivées des catégories abéliennes. *Astérisque*, (239) :xii+253 pp. (1997), 1996. With a preface by Luc Illusie, Edited and with a note by Georges Maltsiniotis. [20](#), [21](#)
- [Wal84] C. T. C. Wall. Notes on the classification of singularities. *Proc. London Math. Soc.* (3), 48(3) :461–513, 1984. [45](#)
- [Wat74] Keiichi Watanabe. Certain invariant subrings are Gorenstein. I, II. *Osaka J. Math.*, 11 :1–8; *ibid.* 11 (1974), 379–388, 1974. [33](#)
- [Yi94] Z. Yi. Homological dimension of skew group rings and crossed products. *Journal of Algebra*, 164(1) :101 – 123, 1994. [37](#)
- [Yos90] Yuji Yoshino. *Cohen-Macaulay modules over Cohen-Macaulay rings*, volume 146 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990. [iii](#), [xiv](#), [32](#), [42](#), [44](#), [45](#), [50](#), [52](#), [80](#), [82](#), [87](#), [111](#)